ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ ΤΟΥ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΕΠΤΑΓΩΝΟΥ

Ὑπὸ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
(Ἐν Ἀθήναις)

Ἀνάτυπον ἐκ του ΔΕΛΤΙΟΥ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Νέα σειρά, Τόμος 9, Τεῦχος 2, 1968, σελ. 9-24

Ἐπεγεργασία ἀνάτυπου καὶ μεταφορά σέ TEX
Ὑπὸ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) γεννηθεὶς ἐν Συρακούσαις τῆς Σικελίας (ἀποικίας τῶν Δωριέων) καὶ φονευθεὶς αὐτόθι κατὰ τὴν διὰ προδοσίας κατάληψιν ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων τῆς πόλεως, τὴν ὁποίαν ἐπὶ τρία σχεδὸν ἔτη ὑπερήσπιζε μόνος του νικηφόρως διὰ τῶν πολεμικῶν μηχανῶν του, εἶχε γράψει πολλὰ ἔργα πρωτότυπα καταπληκτικῆς ἐπινοήσεως. Θεωρεῖται ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός, μηχανικὸς καὶ φυσικός, τὸν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης.

Εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν διεσώθησαν τὰ ἑξῆς ἔργα του:

1. **Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου**, βιβλία δύο.
2. **Κύκλου μέτρησις** ὅπου ὑπολογίζεται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν ὁ ἀριθμὸς π. ($3\frac{1}{10} > \pi > 3\frac{10}{71}$)
3. **Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων** (δηλ. περὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδῶν καὶ ὑπερβολοειδῶν (κωνοειδῆ) καὶ τῶν ἐλλειψοειδῶν (σφαιροειδῆ)).
4. **Περὶ ἑλίκων**.
5. **Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων** (Μηχανικὰ) εἰς δύο βιβλία.
6. **Ψαμμίτης** (ἔργον ἀλγεβρικοῦ-ἀριθμητικοῦ περιεχομένου).
7. **Τετραγωνισμὸς παραβολῆς**.
8. **Ὀχουμένων** εἰς δύο βιβλία (Ὑδροστατική).
9. **Στομάχιον** (διαίρεσις παραλληλογράμμου εἰς 14 τμήματα).
10. **Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων, πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος** (δηλ.μέθοδος).
11. **Πρόβλημα βοεικόν**.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω ἔργων ἐσώθησαν καὶ τὰ κάτωθι ἔργα εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχον μεταφρασθῆ ὑπὸ Ἀράβων Μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι κατεῖχον τὰ εἰς τὴν ἑλληνικὴν γραμμένα ἔργα τὰ ὁποῖα κατόπιν ἀπωλέσθησαν :

1. **Βιβλίον λημμάτων,** περιέχον 15 θεωρήματα ἐπιπεδομετρὶας.
2. **Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου κανονικοῦ ἑπταγώνου,** περιέχον 17 θεωρήματα.
3. **Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους** (λειτουργοῦντος διὰ ῥέοντος ὕδατος).
4. **Περὶ κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων** (ἀνέκδοτον).
5. **Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας** (ἀνέκδοτον).

Ἀπολεσθὲντα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους

Ὑπὸ μεταγενεστέρων συγγραφέων Ἑλλήνων καὶ Ἀράβων μνημονεύονται τὰ ἑξῆς ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν :

1. **Περὶ τριγώνων.**
2. **Περὶ τετραπλεύρων.**
3. **Περὶ 13 ἡμικανονικῶν πολυέδρων.**
4. **Ἀριθμητικά.**
5. **Περὶ ζυγῶν.**
6. **Κεντροβαρικά.**
7. **Πλινθίδες καὶ κύλινδροι** (πλινθὶς ὀνομάζεται πρίσμα ἀκμῶν α, α, β, ἔνθα α>β).
8. **Κατοπτρικὰ** (Ὀπτική).
9. **Ἰσοπεριμετρικά.**
10. **Στοιχεῖα τῶν Μηχανικῶν.**
11. **Ἰσορροπίαι.**
12. **Σφαιροποιΐα** (κατασκευὴ πλανηταρίων).
13. **Στοιχεῖα ἐπὶ τῶν στηρίξεων** (Στατική).
14. **Περὶ παραλλήλων γραμμῶν.**
15. **Περὶ βαρύτητος καὶ ἐλαφρότητος** (πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα.
16. **Περὶ κοίλων παραβολικῶν καυστικῶν κατόπτρων.**
17. **Προοπτική.**
18. **Ἐπισίδια βιβλία** (πιθανῶς περὶ Στατικῆς).
19. **Βαρυουλκὸς - Ὑδροσκοπίαι - Πνευματικὰ** (Ἕλξις βαρῶν, Ὑδροστατική, Ἀεροστατική).
20. **Καῦσις διὰ τῶν κατόπτρων.**
21. **Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς.**
22. **Περὶ δρομομέτρων** (σημ. τὸ ταξίμετρον τῶν πλοίων).

Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουν καὶ τὰ ἑξῆς ἔργα :

1. **Περὶ ἑλίκων.**
2. **Στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν.**
3. **Περὶ τῆς διαμέτρου.**
4. **Συγγράμματα ἐν ἐπιτομῇ.**

Ἐκ τῶν ἔργων τούτων τὸ **Περὶ ἑλίκων** ἔχει διασωθῆ καὶ μνημονεύεται ἀνωτέρω εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα. Ἑπομὲνως τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα ἀνέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 25 (22+3).

Ἐκ τῶν εἰς τὴν ἀραβικὴν διασωθέντων πέντε ἔργων, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **Βιβλίον λημμάτων** ἔχει μεταφρασθῆ εἰς τὴν λατινικήν, τὴν γερμανικήν, τὴν ἀγγλικὴν καὶ τὴν γαλλικήν. Κατὰ τὸ 1965 ἐδημοσιεύσαμεν τοῦτο εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Ἀρχιμήδους, τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον, μὲ μετάφρασιν εἰς τὴν ἑλληνικὴν (Δελτίον Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρείας Νὲα Σειρά, τόμος 6 ΙΙ, τεῦχος 2, 1965, σελ. 265-297).

Ἡ πραγματεία **Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου** ἔχει δημοσιευθῆ ἐκ τῆς ἀραβικῆς μόνον εἰς τὴν γερμανικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τοῦ (Carl Schoy, περιέχεται δὲ εἰς τὴν πραγματείαν του Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomer al-Biruni, ἐκδοθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Julius Ruska καὶ Heinrich Wieleitner, Hannover 1927 (Τὰ μαθήματα τῆς Τριγωνομετρίας τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου ἀλ-Μπιρουνί,.. Ἀννόβερον 1927). Ἐκ τῆς μεταφράσεως ταύτης τοῦ Schoy μεταγλωττίζομεν αὐτὴν κατωτέρω εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν.

Ἡ ὑπὸ τὸν τίτλον **Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους** πραγματεία ἔχει μεταφρασθῆ ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικήν.

Αἱ λοιπαὶ δύο εἰς τὴν ἀραβικὴν σωζόμεναι πραγματεῖαι **Περὶ κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων** καὶ **Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας** δὲν ἔχουν ἀκόμη ἐκδοθῇ διὰ τοῦ τύπου εὑρίσκονται δὲ εἰς χειρόγραφα φυλασσόμενα εἰς Βιβλιοθήκην τῶν Ἰνδιῶν, τῶν ὁποίων κατέχομεν φωτοτυπίας.

Η ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

Ἐν ὀνόματι τοῦ Θεοῦ, τοῦ εὐσπλάγχνου καὶ οἰκτίρμονος!

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 7 ἴσα μέρη, μεταφρασθὲν ὑπὸ τοῦ Ἀμποὺλ-

Χασάν Ταμπὶτ ἴμπν Κουρᾶ ἀλ-Χαρανὶ (περὶ τὸ 900). Τὸ ἔργον ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς πραγματείας καὶ 17 σχημάτων.

Καὶ λέγω, μετὰ τὸν αἶνον πρὸς τὸν Ἀλλάχ καὶ τὰς εὐχὰς πρὸς τὸν προφήτην του καὶ τὴν οἰκογένειάν του, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει πλέον εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν τὸ εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν μου, ἀλλὰ εἶχον ἓν ἀπόκρυφον κατεστραμμένον χειρόγραφον, ἕνεκα τῆς ἀμαθείας τοῦ ἀντιγραφέως καὶ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀντικειμένου. Καὶ κατέβαλον μεγάλον κόπον διὰ νὰ ἀνεύρω δυνατότητας ἐπαληθεύσεως τῶν ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀποριῶν καὶ νὰ ἀνεύρω λύσεις περὶ αὐτῶν καὶ τὴν κανονικὴν διάταξιν τῶν σχημάτων, πρὸς τὸν σκοπὸν εὐκόλου ἐξετάσεως καὶ ἐρεύνης τῶν πηγῶν. Πιθανῶς νὰ χρησιμοποιήσω μερικὰς ἀποδείξεις μεταγενεστέρων. Πρὸς τούτοις ὁ Ἀλλάχ, ὁ παρέχων βοήθειαν, ἂς δώσῃ διὰ τῆς συμβολῆς του ἐπιτυχίαν εἰς τὸ ἔργον μου.

1

Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ **(σχ. 1) λαμβάνομεν δύο σημεῖα** Γ, Δ, **ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις:**

$$\Gamma\Delta^2 = \mathrm{A}\Gamma^2 + \Delta\mathrm{B}^2 \tag{1}$$

Λέγω, ὅτι ἐπίσης εἶναι καὶ $\mathrm{AB}^2 = 2\cdot \mathrm{A}\Delta \times \mathrm{B}\Gamma$.

Σχ. 1

Ἀπόδειξις. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) τὸ ἄθροισμα $\Gamma\Delta^2 + 2\cdot \mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\Delta$, ὁπότε ἔχομεν :

$$2\cdot\Gamma\Delta^2 + 2\cdot\mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\Delta = \mathrm{A}\Gamma^2 + \Delta\mathrm{B}^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\cdot\mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\Delta \tag{2}$$

Τὸ πρῶτον ὅμως μέλος τῆς (2) εἶναι ἴσον πρὸς $2\cdot\Gamma\Delta\cdot(\Gamma\Delta+\mathrm{A}\Gamma) = 2\cdot\Gamma\Delta\cdot\mathrm{A}\Delta$ ὁπότε ἡ (2) γίνεται

$$\mathrm{A}\Gamma^2 + \Delta\mathrm{B}^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\cdot\mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\Delta = 2\cdot\Gamma\Delta\cdot\mathrm{A}\Delta \tag{3}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\mathrm{A}\Delta^2 = (\mathrm{A}\Gamma+\Gamma\Delta)^2 = \mathrm{A}\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\cdot\mathrm{A}\Gamma\cdot\Gamma\Delta$ ἡ (3) γίνεται :

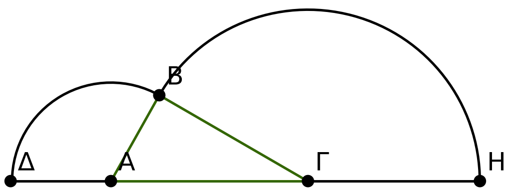
$$\mathrm{A}\Delta^2 + \Delta\mathrm{B}^2 = 2\cdot\Gamma\Delta\cdot\mathrm{A}\Delta \tag{4}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) τὸ $2\cdot \mathrm{ΔΒ}\cdot \mathrm{ΑΔ}$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\mathrm{ΑΔ}^2+\mathrm{ΔΒ}^2+2\cdot\mathrm{ΔΒ}\cdot\mathrm{ΑΔ}=2\cdot(\mathrm{ΑΔ}\cdot\mathrm{ΔΓ}+\mathrm{ΑΔ}\cdot\mathrm{ΔΒ}) \qquad \text{ἤτοι}$$
$$\mathrm{ΑΒ}^2=2\cdot\mathrm{ΑΔ}\cdot\mathrm{ΓΒ} \qquad \text{ὅ·ἔ·δ·}$$

2

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

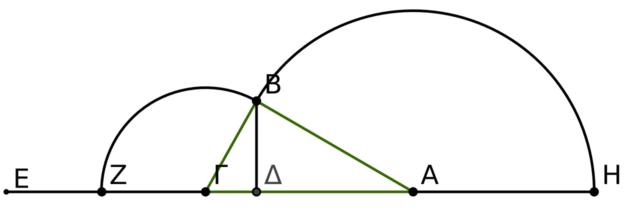


Σχ. 2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ (σχ. 2). Προεκτείνομεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν λαμβάνοντες $\mathrm{ΑΔ}=\mathrm{ΑΒ}$ καὶ $\mathrm{ΓΗ}=\mathrm{ΒΓ}$, ὁπότε ἔχομεν $\mathrm{ΔΓ}=\mathrm{ΑΒ}+\mathrm{ΑΓ}$, $\mathrm{ΑΗ}=\mathrm{ΑΓ}+\mathrm{ΓΗ}$, $\mathrm{ΔΗ}=\mathrm{ΑΒ}+\mathrm{ΒΓ}+\mathrm{ΑΓ}$, ἤτοι ἡ ΔΗ ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\mathrm{ΑΓ}^2=\mathrm{ΑΒ}^2+\mathrm{ΒΓ}^2$ θά εἶναι κατὰ τὸ α' θεώρημα $\mathrm{ΔΗ}^2=2\cdot\mathrm{ΔΓ}\cdot\mathrm{ΑΗ}$ ὅ.ἔ.δ.

3

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς περιμέτρου σὺν τὸ ὕψος.



Σχ. 3.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 3) καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Β τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τὸ ΒΔ. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς λαμβάνομεν $\mathrm{AH} = \mathrm{AB}$, $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{B}$ καὶ $\mathrm{ZE} = \mathrm{B}\Delta$, Λέγω, ὅτι $\mathrm{HZ}^2 = 2\cdot \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{HE}$.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΑ εἶναι ὅμοια ἔχομεν:

$$\frac{\mathrm{EZ}(=\mathrm{B}\Delta)}{\Gamma\mathrm{Z}(=\Gamma\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{AH}(=\mathrm{AB})}{\mathrm{A}\Gamma}$$

Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι:

$$\frac{\mathrm{EZ}+\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{AH}+\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} \quad \text{τουτέστιν} \quad \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{H}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma}$$

καὶ ἐναλλὰξ εἶναι:

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{A}\Gamma}$$

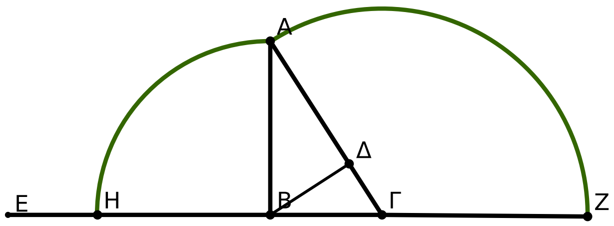
καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma+\mathrm{H}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} \quad \text{τουτέστιν} \quad \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{A}\Gamma}$$

ἐξ ἧς $\mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma$ ἢ $2\cdot\mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = 2\cdot\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma$. Ἀλλὰ $2\cdot\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma = \mathrm{HZ}^2$ (θ:2). Δι᾽ ἀντικαταστάσεως ἔχομεν: $2\cdot\mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{HZ}^2$ ὅ.ἔ.δ.

4

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς περιμέτρου σὺν τὸ ὕψος.



Σχ. 4.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4). Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΓ πρὸς τὰ δύο μέρη λαμβάνομεν τμῆμα $\mathrm{BH} = \mathrm{AB}$, $\mathrm{HE} = \mathrm{B}\Delta$ (ὕψος ὑποτεινούσης) καὶ $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{A}$, Λέγω, ὅτι:

$$\mathrm{HZ}^2 = 2\cdot\Gamma\mathrm{Z}\cdot\mathrm{EZ}$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\mathrm{HB} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{HE} \cdot \Gamma\mathrm{Z}$, θὰ εἶναι καὶ

$$2 \cdot \mathrm{HB} \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{HE} \cdot \Gamma\mathrm{Z} \quad \text{καὶ εἶναι}$$

$$\mathrm{HB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \Gamma\mathrm{Z}^2$$

$$\mathrm{H\Gamma}^2 = (\mathrm{HB} + \mathrm{B\Gamma})^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 + 2 \cdot \mathrm{HB} \cdot \mathrm{B\Gamma}$$

$$\mathrm{H\Gamma}^2 = \Gamma\mathrm{Z}^2 + 2 \cdot \mathrm{HE} \cdot \Gamma\mathrm{Z}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Gamma\mathrm{Z}^2$ καὶ ἔχομεν

$$\mathrm{H\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{Z}^2 = 2 \cdot \Gamma\mathrm{Z}^2 + 2 \cdot \mathrm{HE} \cdot \Gamma\mathrm{Z}$$

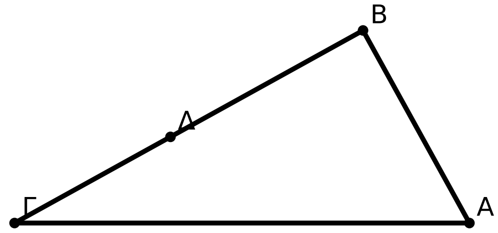
Ἐπειδὴ $\mathrm{HZ}^2 = (\mathrm{H\Gamma} + \Gamma\mathrm{Z})^2 = \mathrm{H\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{Z}^2 + 2 \cdot \mathrm{H\Gamma} \cdot \Gamma\mathrm{Z}$ δι᾽ ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \mathrm{HZ}^2 &= 2 \cdot \Gamma\mathrm{Z}^2 + 2 \cdot \mathrm{HE} \cdot \Gamma\mathrm{Z} + 2 \cdot \mathrm{H\Gamma} \cdot \Gamma\mathrm{Z} \\ &= 2 \cdot \Gamma\mathrm{Z} \cdot (\Gamma\mathrm{Z} + \mathrm{HE} + \mathrm{H\Gamma}) \\ &= 2 \cdot \Gamma\mathrm{Z} \cdot \mathrm{EZ} \quad \text{ὅ·ἔ·δ·} \end{aligned}$$

5

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ **ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ** Β **(σχ. 5). Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς** ΒΓ **τμῆμα** $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}$. **Λέγω, ὅτι**

$$(\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\mathrm{A})^2 + \Delta\Gamma^2 = (\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma})^2$$



Σχ. 5.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$\begin{aligned} \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 &= (\mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma)^2 + \mathrm{B\Delta}^2 \\ &= 2 \cdot \mathrm{B\Delta}^2 + 2 \cdot \mathrm{B\Delta} \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{θὰ ἔχωμεν} \quad \mathrm{A\Gamma}^2 &= 2 \cdot \mathrm{AB}^2 + 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot (\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{AB}) + \Delta\Gamma^2 \\ &= \Delta\Gamma^2 + 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma} \end{aligned}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα $\mathrm{AB}^2 + 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma}$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 + 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB}^2 + \Delta\Gamma^2 + 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot (\mathrm{A\Gamma} + \Gamma\mathrm{B})$$

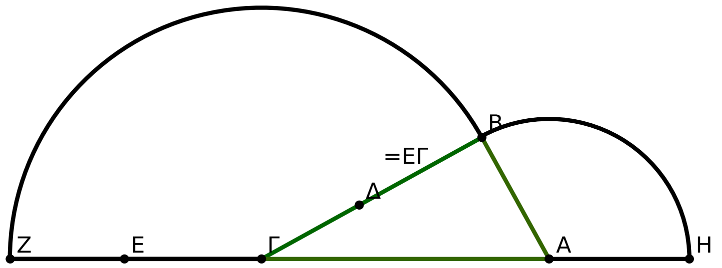
Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $(\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ})^2$, ὁπότε ἔχομεν

$$(\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ})^2+(\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ})^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΔΓ}^2+(\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ})^2+2\cdot\text{ΑΒ}\cdot(\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ})$$

ἤτοι $(\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ})^2+(\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ})^2=(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΑ})^2+\text{ΔΓ}^2$ ὅ.ἔ.δ.

6

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 6). Προεκτείνομεν τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων καὶ λαμβάνομεν $\text{ΑΗ}=\text{ΑΒ}=\text{ΓΕ}$, $\text{ΓΖ}=\text{ΓΒ}$, $\text{ΓΕ}=\text{ΑΒ}$, **ὁπότε εἶναι** $\text{ΗΓ}=\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}$, $\text{ΑΖ}=\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ}$ **καὶ** $\text{ΗΖ}=$ **πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου. Λέγω, ὅτι** $\text{ΗΖ}^2+\text{ΖΕ}^2=\text{ΗΓ}^2+\text{ΑΖ}^2$



Σχ. 6.

Ἀπόδειξις.

$$\text{ΑΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2=\text{ΓΕ}^2+\text{ΓΖ}^2=\text{ΖΕ}^2+2\cdot\text{ΓΕ}\cdot\text{ΓΖ}$$
$$=\text{ΖΕ}^2+2\cdot\text{ΑΗ}\cdot\text{ΓΖ}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ γινόμενο $2\cdot\text{ΑΗ}\cdot\text{ΑΓ}$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\text{ΑΓ}^2+2\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΗ}=\text{ΖΕ}^2+2\cdot\text{ΑΗ}\cdot\text{ΑΖ}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΑΗ^2, ὁπότε ἔχομεν

$$\text{ΗΓ}^2=\text{ΑΗ}^2+\text{ΖΕ}^2+2\cdot\text{ΑΗ}\cdot\text{ΑΖ}$$

Τέλος προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΑΖ^2 καὶ λαμβάνομεν

$$\text{ΗΓ}^2+\text{ΑΖ}^2=(\text{ΑΗ}+\text{ΑΖ})^2+\text{ΖΕ}^2=\text{ΗΖ}^2+\text{ΖΕ}^2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

7

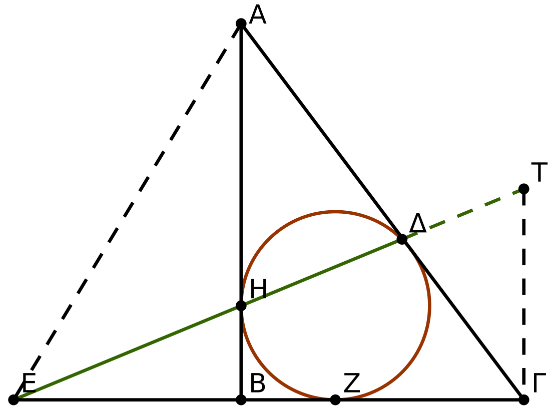
Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ **(σχ. 7), ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν δύο σημεῖα** Γ **καὶ** Δ **τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης** $\text{ΓΔ}\cdot\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}\cdot\text{ΔΒ}$ **Λέγω ὅτι** $2\cdot\text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ}=\text{ΑΔ}\cdot\text{ΓΒ}$

Σχ. 7.

Ἀπόδειξις. $ΑΓ \cdot ΔΒ = ΓΔ \cdot ΑΒ = ΓΔ \cdot (ΑΓ + ΓΒ) = ΑΓ \cdot ΓΔ + ΓΒ \cdot ΓΔ$ καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $2 \cdot ΑΓ \cdot ΔΒ = ΑΓ \cdot ΓΔ + ΓΒ \cdot ΓΔ + ΑΓ \cdot ΔΒ = 2 \cdot ΑΒ \cdot ΓΔ$. Εἶναι ὅμως $ΑΓ \cdot ΓΔ + ΑΓ \cdot ΔΒ = ΑΓ \cdot ΓΒ$ καὶ κατὰ ταῦτα ἔχομεν $2 \cdot ΑΒ \cdot ΓΔ = ΑΓ \cdot ΓΒ + ΒΓ \cdot ΓΔ = ΓΒ \cdot (ΑΓ + ΓΔ) = ΑΔ \cdot ΓΒ$ ὅ.ἔ.δ.

8

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ **(σχ. 8) ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ** Β, **Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον τὸν κύκλον** ΔΗΖ, **φέρομεν τὴν εὐθεῖαν** ΔΗ, **ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου** Δ **καὶ** Η **καὶ προεκτείνομεν τὴν** ΔΗ **μέχρις ὅπου συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς** ΓΒ **εἴς τι σημεῖον, ἔσιω τὸ** Ε. **Λέγω, ὅτι** $ΒΕ = ΑΗ$.



Σχ. 8.

Ἀπόδειξις. Ἑνοῦμεν τὸ Α μὲ τὸ Ε. Εἶναι $ΑΔ = ΑΗ$, Ἡ ΔΗ προεκτεινομένη συναντᾶται μὲ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε. Εἶναι δὲ $ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΕ^2$, $ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΕ^2$ καὶ ἑπομένως

$$ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$$

Προσέτι εἶναι $ΕΔ \cdot ΕΗ = ΕΖ^2$ καὶ ἑπομένως

$$ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΗ^2 + ΕΖ^2$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΒΕ^2$ καὶ λαμβάνομεν

$$ΑΒ^2 = 2 \cdot ΓΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2 + ΑΗ^2$$

Ἀφαιροῦντες τὸ $ΑΗ^2$ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἔχομεν

$$2 \cdot ΑΗ \cdot ΗΒ + ΗΒ^2 = 2 \cdot ΕΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2$$

Ἐπειδὴ δὲ $HB^2 = BZ^2$, θὰ ἔχωμεν

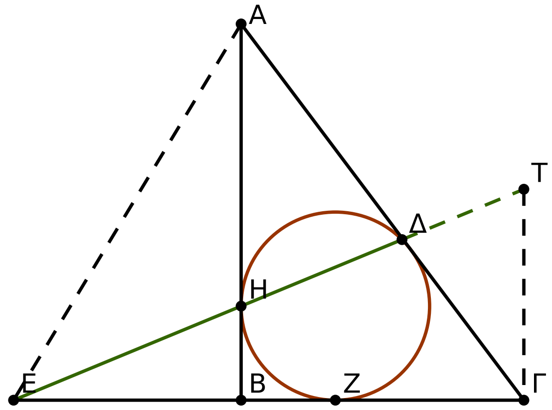
$$2 \cdot AH \cdot HB = 2 \cdot EB \cdot BZ$$

Καὶ ἐπειδὴ $HB = BZ$, θά ἔχωμεν $AH = EB$ ὅ.ἔ.δ.

9

Θεωρῶ τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (σχ. 9). Λέγω ἀκόμη, ὅτι

$$\frac{E\Gamma}{EB} = \frac{\Delta\Gamma}{HB}$$



Σχ. 9.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν εἰς τὸ Γ τὴν κάθετον καὶ προεκτείνομεν τὴν ΕΔ μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἴς τι σημεῖον, ἔστω Τ, Ἐπειδὴ ἡ ΓΤ εἶναι, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ τὰ τρίγωνα ΤΓΔ, ΑΔΗ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως θά ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{AH}{\Gamma T} = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} \text{ καὶ ἐναλλάξ } \frac{AH}{A\Delta} = \frac{\Gamma T}{\Gamma\Delta}$$

Εἶναι ὅμως $A\Delta = AH$ καί $\Gamma T = \Gamma\Delta$. Καί ἐπειδὴ

$$\frac{\Gamma E}{EB} = \frac{\Gamma T}{HB} \text{ θὰ ἔχωμεν } \frac{\Gamma E}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{HB} \text{ ὅ·ἔ·δ·}$$

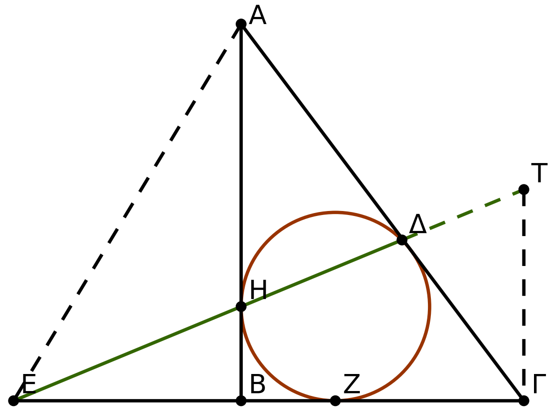
10

Θεωρῶ τὸ αὐτὸ σχῆμα, ὡς προηγουμένως (σχ. 10). Λέγω, ὅτι $A\Delta \cdot \Delta\Gamma =$ **τρίγωνον ΑΒΓ.**

Ἀπόδειξις.

$$\text{Εἶναι } \frac{E\Gamma}{EB} = \frac{\Gamma Z}{ZB}$$

$$\text{ἐξ ἧς } E\Gamma \cdot ZB = EB \cdot \Gamma Z$$



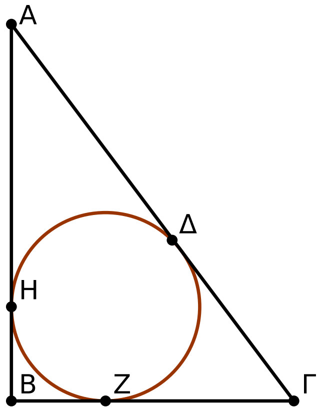
Σχ. 10.

Καὶ ἐπειδὴ ΕΖ · ΒΓ = 2 · ΑΔ · ΔΓ, ΕΒ = ΑΗ, ΒΖ = ΒΗ καὶ ΑΒ = ΕΖ, θὰ εἶναι ΑΒ · ΒΓ = 2 · ΑΔ · ΔΓ = 2 τρίγωνον ΑΒΓ καὶ συνεπῶς ΑΔ · ΔΓ = τρίγωνον ΑΒΓ. ὅ.ἔ.δ.

11

Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ **ἔχον τὴν παρὰ τὸ** Β **γωνίαν ὀρθὴν (σχ.11), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος** ΔΗΖ. **Λέγω, ὅτι** ΑΔ · ΔΓ = **τρίγωνον** ΑΒΓ.



Σχ. 11.

Ἀπόδειξις. Εἶναι ΑΔ = ΑΗ καὶ ΓΔ = ΓΖ.

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2 + 2\cdot \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$, θὰ εἶναι ἐπίσης

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2 + 2\cdot \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα $\mathrm{AH}^2+\Gamma\mathrm{Z}^2$ καὶ λαμβάνομεν $\mathrm{HB}^2+\mathrm{BZ}^2+2\cdot(\mathrm{HB}\cdot\mathrm{AH}+\Gamma\mathrm{Z}\cdot\mathrm{ZB})=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$

Εἶναι ὅμως $\mathrm{HB}^2=\mathrm{BZ}^2$ καὶ $\mathrm{BZ}^2+\Gamma\mathrm{Z}\cdot\Gamma\mathrm{B}=\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{BZ}$

$2\cdot(\mathrm{HB}\cdot\mathrm{AH}+\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{BZ})=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$ καὶ $\mathrm{HB}=\mathrm{BZ}$

$2\cdot(\mathrm{BZ}\cdot\mathrm{AH}+\mathrm{HB}\cdot\Gamma\mathrm{B})=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$

Ἐπειδὴ $2\cdot\mathrm{AH}\cdot\mathrm{B}\Gamma=2\cdot(\mathrm{BZ}\cdot\mathrm{AH}+\Gamma\mathrm{Z}\cdot\mathrm{AH})=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$, θὰ ἔχωμεν, ἐὰν προσθὲσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ κατόπιν ἀφαιρὲσωμεν τὸ κοινὸν γινόμενον $2\cdot\mathrm{ZB}\cdot\mathrm{AH}$

$2\cdot(\mathrm{AH}\cdot\Gamma\mathrm{B}+\mathrm{HB}\cdot\Gamma\mathrm{B})=4\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$

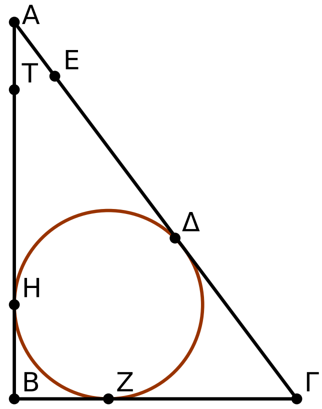
$\Gamma\mathrm{B}\cdot(\mathrm{AH}+\mathrm{HB})=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$

$\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{AB}=2$ τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma=2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma$

ἤτοι $\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma=$ τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ ὅ.ἔ.δ.

12

Λαμβάνομεν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΔΕ καὶ ΗΤ ἴσον πρὸς ΓΔ (σχ. 12).



Σχ. 12.

Ἀπόδειξις. Τότε θά εἶναι $\mathrm{BT}=\mathrm{B}\Gamma$, καὶ ἐπειδὴ

$\mathrm{A}\Gamma^2=\mathrm{A}\Delta^2+\Delta\mathrm{E}^2+2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BT}^2$

καὶ $\mathrm{A}\Delta^2+\Delta\mathrm{E}^2+2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AE}^2+4\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}$

θὰ ἔχωμεν $\mathrm{AH}^2+\mathrm{BT}^2=\mathrm{AE}^2+4\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}$

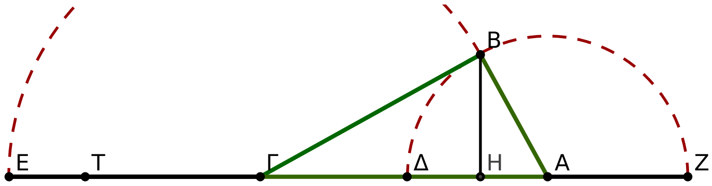
Εἶναι ὅμως $\mathrm{AE}^2+4\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AT}^2+2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BT}$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὴν ἰσότητα $\mathrm{AE}^2=\mathrm{AT}^2$, θὰ ἔχωμεν

$4\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}=2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BT}$

ἢ $2\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BT}$ ὅ.ἔ.δ.

13

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, **ἔχον τὴν παρὰ τὸ** Β **γωνίαν ὀρθήν. Λαμβάνω** $ΑΔ = ΑΒ$ **(σχ. 13). Λέγω. ὅτι τὸ γινόμενον** ΗΔ **ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου = 4 τρίγωνα** ΑΒΓ.



Σχ. 13.

Ἀπόδειξις. Προεκτείνομεν τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τά δύο μέρη εὐθυγράμμως καὶ λαμβάνομεν ΖΑ = ΑΒ, ΓΕ = ΓΒ, ΕΤ = ΗΔ καὶ ΖΕ = περίμετρος τοῦ τριγώνου (σημ. παρελείφθη νά σημειωθῇ ὅτι ΒΗ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὕψος τοῦ τριγώνου). Καὶ εἶναι

$$ΖΑ + ΓΔ = ΑΓ \text{ Ἐπίσης εἶναι } 2 \cdot (ΑΓ \cdot ΖΕ + ΕΤ \cdot ΖΕ) = ΖΕ^2$$

$$ΖΕ^2 = ΖΑ^2 + ΑΓ^2 + ΓΕ^2 + 2 \cdot (ΖΑ \cdot ΑΓ + ΖΑ \cdot ΓΕ + ΑΓ \cdot ΓΕ)$$

$$2 \cdot (ΑΓ \cdot ΖΕ + ΕΤ \cdot ΖΕ) = ΑΖ^2 + ΑΓ^2 + ΓΕ^2 + 2 \cdot (ΑΖ \cdot ΑΓ + ΖΕ \cdot ΑΓ)$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $2 \cdot ΑΓ \cdot ΖΕ$, λαμβάνομεν

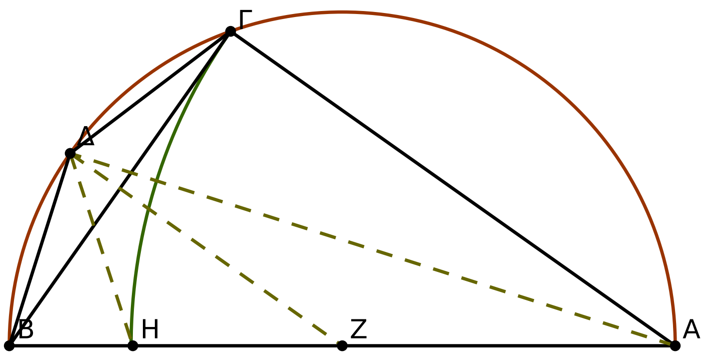
$$ΕΤ \cdot ΖΕ = 2 \cdot ΑΖ \cdot ΓΕ = 2 \cdot ΑΒ \cdot ΒΓ = 4 \text{ τρίγωνα } ΑΒΓ$$

Ἐκ τούτου εἶναι $ΕΤ \cdot ΖΕ =$

ΗΔ ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου = 4 τρίγωνα ΑΒΓ ὅ.ἔ.δ.

14

Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΔΒ **μὲ κέντρον τὸ** Ζ **(σχ. 14). Εἰς τὸ ἡμικύκλιον τοῦτο ἔστω ἡ χορδὴ** ΑΓ. **Διχοτομοῦμεν τὸ τόξον** ΒΓ **διὰ τοῦ σημείου** Δ, **καὶ ἑνοῦμεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μὲ τὰ σημεῖα** Β **καὶ** Γ, **καὶ λαμβάνομεν** $ΑΗ = ΑΓ$. **Λέγω, ὅτι** $ΖΒ \cdot ΒΗ = ΒΔ^2$.



Σχ. 14.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΖ καὶ ΔΗ, Ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν δύο τόξων ΓΔ καὶ ΔΒ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΓΑΔ καὶ ΔΑΒ. Ἐπίσης εἶναι $\mathrm{A\Gamma = AH}$, καὶ ἡ ΑΔ εἶναι κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο τριγώνων. Ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{\Delta H = \Delta B}$ καὶ $\angle\mathrm{\Delta HB} = \angle\mathrm{\Delta BH} = \angle\mathrm{B\Delta Z}$, θὰ εἶναι τρίγωνον ΒΗΔ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΖ. Κατὰ συνέπειαν ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

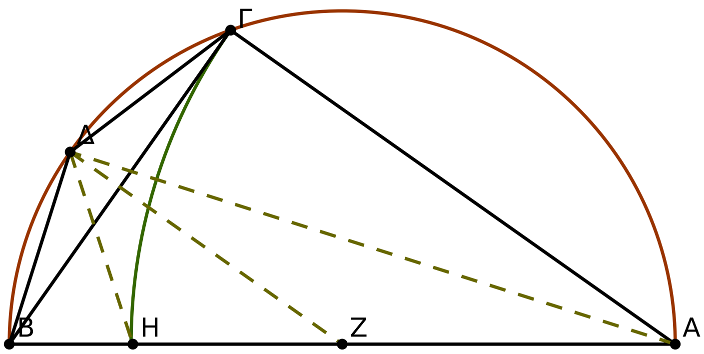
$$\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{BZ}}$$

καὶ ἐκ ταύτης εἶναι $\mathrm{BZ \cdot HB = B\Delta^2}$ ὅ.ἔ.δ.

15

Θεωροῦμεν τὸ προηγούμενον σχῆμα (σχ. 15). Λέγω, ὅτι

$$\mathrm{AZ \cdot A\Gamma + \Delta B^2 = 2 \cdot AZ^2}$$



Σχ. 15.

Ἀπόδειξις.
$$\mathrm{2 \cdot ZB^2 = AB \cdot ZB = ZB \cdot AH = ZB \cdot A\Gamma =}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{AB \cdot A\Gamma + ZB \cdot BH}$$

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ὅμως εἶναι $\mathrm{ZB{\cdot}HB = \Delta B^2}$ καὶ
$\mathrm{2 \cdot ZB^2 = AZ \cdot A\Gamma + \Delta B^2}$ ὅ.ἔ.δ.

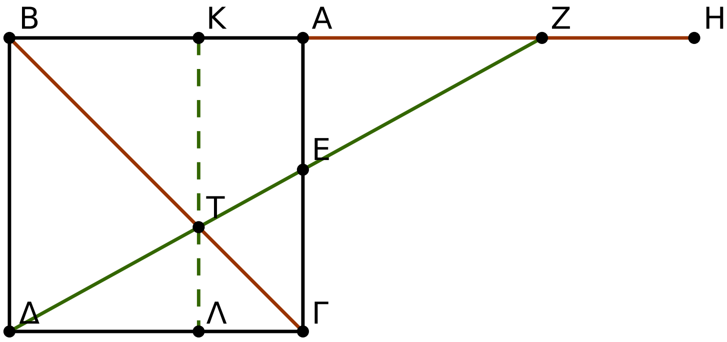
16

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ **(σχ. 16). Προεκτείνομεν τὴν** ΑΒ **εὐθυγράμμως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ** Η **καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον** ΒΓ. **Ἐκ τοῦ σημείου** Δ **φέρομεν τὴν** ΔΖ **κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τρίγωνον** ΑΖΕ **= τρίγωνον** ΓΤΔ. **Διὰ τοῦ σημείου** Τ **φέρομεν τὴν εὐθεῖαν** ΚΤΛ **παράλληλον πρὸς τὴν** ΑΓ. **Λέγω, δτι**

$$\mathrm{AB \cdot KB = AZ^2} \qquad \mathrm{ZK \cdot AK = KB^2}$$

καὶ ἀκόμη ὅτι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΖ, ΒΚ **εἶναι** $>$ ΑΚ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\frac{\Gamma\Delta(=\mathrm{AB})}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{T}\Lambda}$ θὰ εἶναι $\Gamma\Delta \cdot \mathrm{T}\Lambda = \mathrm{AZ} \cdot \mathrm{AE}$



Σχ. 16.

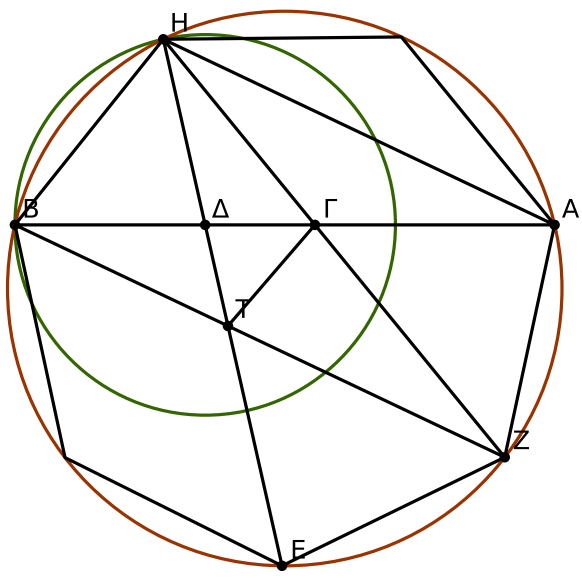
Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ZAE, ZKT, TΛΔ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{T}\Lambda} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Lambda\Delta(=\mathrm{KB})} \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{KB}} \text{ καὶ } \frac{\mathrm{T}\Lambda(=\mathrm{AK})}{\mathrm{K}\Lambda(=\mathrm{KB})} = \frac{\Lambda\Delta(=\mathrm{KB})}{\mathrm{ZK}}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{KB} = \mathrm{AZ}^2$, $\mathrm{ZK} \cdot \mathrm{AK} = \mathrm{KB}^2$ καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν $\mathrm{AZ}, \mathrm{KB} > \mathrm{AK}$ ὅ.ἔ.δ.

17

Θέλομεν τώρα νά χωρίσωμεν τὸν κύκλον εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη (σχ. 17)



Σχ. 17.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὴν ὁποίαν ὑποθέτουμεν γνωστήν. Ἐπ αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε $\mathrm{A\Delta \cdot \Gamma\Delta = \Delta B^2}$, $\mathrm{\Gamma B \cdot \Delta B = A\Gamma^2}$, Πρὸς τούτοις εἶναι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ $\mathrm{\Delta B > \Gamma\Delta}$, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Κατασκευάζομεν τώρα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΔ καὶ ΒΔ τὸ τρίγωνον ΓΗΔ. Ἐπὶ τούτοις εἶναι $\mathrm{\Gamma H = A\Gamma}$, $\mathrm{\Delta H = \Delta B}$ καὶ $\mathrm{\Gamma\Delta = \Gamma\Delta}$, Περιγράφομεν τώρα περὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ τὸν κύκλον ΑΗΒΕΖ καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΗΓ καὶ ΗΔ εὐθυγράμμως μέχρις ὅτου συναντήοουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα, ἔστω Ζ καὶ Ε. Αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΗΕ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Τ. Φέρομεν τὴν ΓΤ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος $\mathrm{A\Gamma = \Gamma H}$, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ θά εἶναι $\mathrm{\angle HA\Gamma = \angle AH\Gamma}$, τόξον ΑΖ = τόξον ΗΒ. Καὶ πράγματι εἶναι

$$\mathrm{A\Delta \cdot \Gamma\Delta = \Delta B^2 = \Delta H^2}$$

καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΔ, διότι ἡ γωνία ΔΑΗ = πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΔ, δηλαδὴ τὸ τόξον ΖΕ = πρὸς τὸ τόξον ΒΗ. Κατὰ ταῦτα τὰ τρία τόξα ΒΗ, ΑΖ καὶ ΖΕ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Εἶναι δὲ ἡ ΖΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἡ $\mathrm{\angle \Gamma AH = \angle \Gamma H\Delta = \angle TB\Delta}$, $\mathrm{H\Delta = \Delta B}$, $\mathrm{\Gamma\Delta = \Gamma T}$, $\mathrm{\Gamma H = BT}$, καὶ ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα Β, Η, Γ, Τ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων ΗΒΓ καὶ ΗΒΤ ἕπεται

$$\mathrm{\Gamma B \cdot \Delta B = H\Gamma^2 = A\Gamma^2}$$

καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων ΤΗΔ καὶ ΓΗΔ ἕπεται

$$\mathrm{TH \cdot H\Delta = H\Gamma^2}$$

Εἶναι δὲ $\mathrm{\Gamma B = TH}$ καὶ $\mathrm{\angle \Delta\Gamma H = \angle HT\Gamma = 2 \cdot \angle \Gamma AH}$, $\mathrm{\angle \Gamma T\Delta = \angle \Delta BH = 2 \cdot \angle \Gamma AH}$. Κατὰ ταῦτα εἶναι τόξον ΑΗ = 2· τόξον ΗΒ, καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{\angle \Delta HB = \angle \Delta BH}$ θὰ εἶναι καὶ τόξον ΕΒ = 2· τόξον ΗΒ, τουτέστιν ἑκάτερον τῶν τόξων ΑΗ καὶ ΕΒ = 2· τόξον ΗΒ, καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος ΑΗΒΕΖ ἐχωρίσθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἂς εἶναι αἶνος, πρὸς τὸν θεόν, τὸν ἕνα κλπ.

Καὶ ἐδῶ ἐτελείωσεν ἡ βελτὶωσις καὶ ἡ ἐπιμελὴς σύνταξις αὐτοῦ τοῦ περιφήμου ἀντιγράφου, ἐκ τοῦ χειρογράφου τοῦ διορθώσαντος αὐτὸ Φακὶρου. Θεέ, πρὸς ὃν αἶνος καὶ ὕμνος ἔστω, εὐλόγησον τὸν προσκυνητὴν τῆς Μέκκας Μουσταφᾶ, τὸν πιστόν μου, γενναῖον υἱόν. Ἄς εἶναι ἔλεος ὁ Ἀλλάχ πρὸς αὐτὸν καὶ ὅλους τοὺς Μουσουλμάνους.