ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0
Λογική, Σύνολα

0.1 Λογική

Η θεωρία της προτασιακής μαθηματικής λογικής πραγματεύεται με προτάσεις οι οποίες είναι αυστηρά αληθείς ή ψευδείς. Ακολουθώντας αυτή την θεωρία ας καλούμε τέτοιες προτάσεις "ισχυρισμούς". Ένας ισχυρισμός λοιπόν, θα επιδέχεται μία και μόνο ερμηνεία η οποία θα είναι αλήθεια ή ψέμα.

Αυτό που μας ενδιαφέρει σ'αυτή τη θεωρία, είναι να μπορούμε να αποφανθούμε για σύνθετες προτάσεις αν είναι αλήθεια ή ψέμα. Εδώ επεισέρχονται οι λογικοί σύνδεσμοι με τους οποίους κατασκευάζουμε πολυπλοκότερες προτάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν P,Q είναι ισχυρισμοί και λ είναι λογικός σύνδεσμος, τότε P λ Q είναι ισχυρισμός όπου η αλήθεια ή το ψεύδος του προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τον λογικό σύνδεσμο λ. Ένας ισχυρισμός που είναι πάντα αληθής ονομάζεται ταυτολογία.

Για να απεικονίσουμε την απόδοση τιμών ενός λογικού συνδέσμου χρησιμοποιούμε συνήθως ένα πίνακα αληθείας. Στο παρακάτω σχήμα παραθέτουμε πίνακες αληθείας για τους λογικούς συνδέσμους της διάζευξης και της σύζευξης.

P	Q	ή
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

P	Q	και
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Λεκτικά, η διάζευξη (P ή Q) είναι αληθής, όταν τουλάχιστον ένας από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει, ενώ η σύζευξη (P και Q) δύο ισχυρισμών είναι αληθής όταν και οι δύο είναι αληθείς.

Ο μοναδιαίος λογικός τελεστής της άρνησης ενός ισχυρισμού P συμβολίζεται με (όχι P) και είναι αληθής όταν ο P είναι ψευδής.

Άλλοι δημοφιλείς λογικοί σύνδεσμοι είναι αυτοί της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας. Οι πίνακες αληθείας των φαίνονται παρακάτω.

P	Q	=>
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

P	Q	<=>
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

P	όχι P
Α	Ψ
Ψ	Α

Παραδείγματα Εστω οι κάτωθι ισχυρισμοί για τους πραγματικούς α και β:

i. $P : \alpha = 0$
ii. $Q : \beta = 0$
iii. $R : \alpha\beta = 0$

Τότε μπορούμε να περιγράψουμε

1. Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $\alpha \cdot \beta$ είναι ίσο με το 0 αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το 0 ως

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$
$$R \Leftrightarrow P \text{ ή } Q$$

2. Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών $\alpha \cdot \beta$ είναι διάφορο του μηδενός αν και μόνο αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός.

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$
$$\text{όχι } R \Leftrightarrow \text{ όχι } P \text{ και όχι } Q$$

Ο παρακάτω πίνακας υποδεικνύει πως χρησιμοποιούμε πίνακες αληθείας για να αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (\text{όχι } P) \text{ ή } Q$$

είναι πάντα αληθής, δηλαδή ταυτολογία.

P	Q	όχι P	(όχι P) ή Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ (όχι P) ή Q
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

0.1 Λογική
Σωστό ή Λάθος

1 Η φράση "Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός" είναι ισχυρισμός. . . . . **Σ Λ**

2 Η φράση "Που ήσουν χθες;" είναι ισχυρισμός. . . . . **Σ Λ**

3 Υπάρχουν 16 διαφορετικοί δυικοί λογικοί σύνδεσμοι. . . . . **Σ Λ**

4 P και (Q ή R) $\Leftrightarrow$ (P και Q) ή (P και R). . . . . **Σ Λ**

5 όχι (όχι P) $\Leftrightarrow$ P. . . . . **Σ Λ**

6 Ισχύει : $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ . . . . **Σ Λ**

7 Ισχύει : $\alpha^2 \neq 4 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$ . . . . **Σ Λ**

8 Ισχύει : $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ . . . . **Σ Λ**

0.2 Στοιχεία θεωρίας συνόλων

Σύμφωνα με τον μαθηματικό Cantor

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\in$ και $\notin$ για να υποδηλώσουμε αν κάποιο αντικείμενο ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο.

Παράσταση Συνόλων Συνήθως χρησιμοποιούμε τους κάτωθι δύο τρόπους για να παραστήσουμε ένα σύνολο

1. Με αναγραφή των στοιχείων του. Όταν είναι λίγα τα στοιχεία του ή είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Για παράδειγμα

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$$
$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$

2. Με περιγραφή των στοιχείων του. Οταν τα στοιχεία του μπορούν να περιγραφούν βάση κάποιας ιδιότητας τους. Για παράδειγμα

$$A = \{x \in Z \mid x \text{ άρτιος}\}$$
$$B = \{x \in R \mid x > 0\}$$

Ίσα σύνολα Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A. Γράφουμε τότε

$$A = B$$

Υποσύνολα συνόλου Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Συμβολίζουμε ως

$$A \subseteq B$$

αν δε, υπάρχει στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A τότε το A λέγεται και γνήσιο υποσύνολο του B και συμβολίζεται ως

$$A \subset B$$

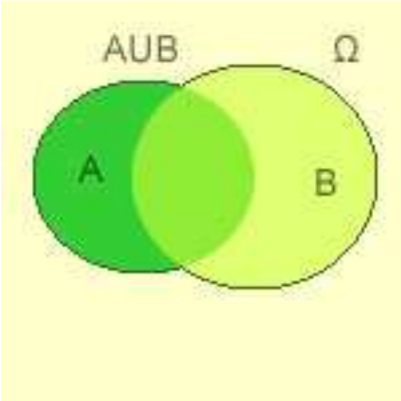
Το κενό σύνολο Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με $\emptyset$

Σχόλια Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Πράξεις με σύνολα Τις περισσότερες φορές που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά τα θεωρούμε υποσύνολα ενός συνόλου αναφοράς που λέγεται βασικό σύνολο και συμβολίζεται με Ω. Παρακάτω, θα ορίσουμε τις βασικότερες πράξεις μεταξύ συνόλων και θα χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα (Venn) για την εποπτική τους παρουσία.

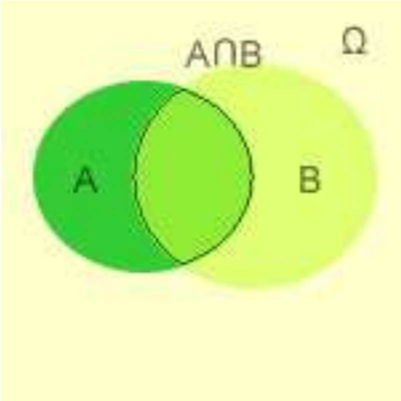
Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



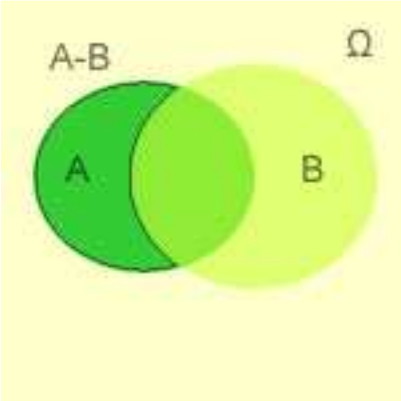
Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$



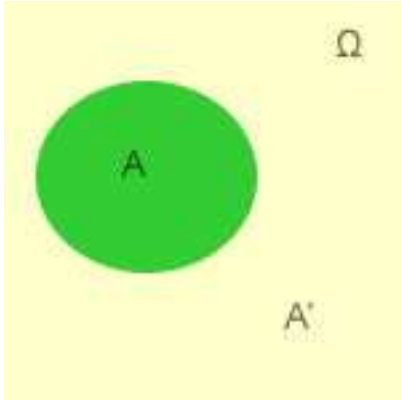
Διαφορά δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν στο σύνολο Α αλλά δεν ανήκουν στο Β και συμβολίζεται με $A - B$.

$$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και όχι } x \in B\}$$



Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με Α′.

$$A' = \{x \in \Omega \mid \text{όχι } x \in A\}$$



0.2 Στοιχεία θεωρίας συνόλων
Σωστό ή Λάθος

1 Ενα σύνολο με ν στοιχεία έχει 2^{ν} υποσύνολα. . . . . **Σ Λ**

2 Το κενό σύνολο δεν έχει υποσύνολα. . . . . **Σ Λ**

3 Ισχύει $\{\emptyset\} = \emptyset$. . . . . **Σ Λ**

4 Ισχύει $\emptyset \subseteq \emptyset$. . . . . **Σ Λ**

5 Αν το Α έχει μ το πλήθος στοιχεία και το Β έχει ν το πλήθος στοιχεία, τότε το $A \cup B$ έχει $\mu + \nu$ το πλήθος στοιχεία. . . . . **Σ Λ**

6 Ισχύει $A \cup \emptyset = A$. . . . . **Σ Λ**

7 Ισχύει $A \cap \emptyset = A$. . . . . **Σ Λ**

8 Ισχύει $(A \cap H) \cup (A \cap H') = A$. . . . . **Σ Λ**

9 Ισχύει $(A \cup B) - \Gamma = A \cup (B - \Gamma)$. **Σ Λ**

10 Ισχύει $(A \cup B \cup \Gamma)' = A' \cap B' \cap \Gamma'$. . . . . **Σ Λ**

11 Ισχύει $(A \cap B \cap \Gamma)' = A' \cup B' \cup \Gamma'$. . . . . **Σ Λ**

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα

Στη θεωρία των πιθανοτήτων χρησιμοποιούμε τον όρο "πείραμα τύχης" για να περιγράψουμε την εκτέλεση ενός πειράματος (μιας διεργασίας) του οποίου το αποτέλεσμα δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων.

Παραδείγματα :

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα "κεφαλή ή γράμματα".
2. Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη της πάνω έδρας του.
3. Ρίχνουμε ένα ζάρι έως να φέρουμε έξι.
4. Διαλέγουμε 10 κάρτες από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα και καταγράφουμε τον αριθμό των άσσων.
5. Επιλέγουμε τυχαία 50 ανθρώπους και καταγράφουμε πόσοι από αυτούς γνωρίζουν σκάκι.
5. Καταγράφουμε τη διάρκεια ζωής ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζουμε **δειγματικό χώρο** ή δειγματοχώρο του πειράματος (sample space).

Συμβολικά, αν $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\kappa\}$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης με δειγματοχώρο Ω τότε γράφουμε

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\kappa\}$$

Για το πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης π.χ. μπορούμε να γράψουμε $\Omega = \{K, \Gamma\}$ ενώ για το δεύτερο μπορούμε να γράψουμε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ενδεχόμενα ή Γεγονότα

- Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο η γεγονός (event)**.
- Όταν το ενδεχόμενο έχει ένα μόνο στοιχείο του δειγματοχώρου καλείται **απλό** ενώ όταν έχει περισσότερα καλείται **σύνθετο**.
- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου Α λέμε ότι το Α **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**.

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

- Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντοτε. Γι' αυτό το Ω λέγεται και **βέβαιο** ενδεχόμενο. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\emptyset$ το οποίο δεν πραγματοποιείται ποτέ. Γι'αυτό λέμε ότι το $\emptyset$ είναι το **αδύνατο** ενδεχόμενο.
- Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα ή ξένα** μεταξύ τους όταν $A \cap B = \emptyset$.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα συμβολίζουμε με $N(A)$. Για παράδειγμα αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ τότε έχουμε $N(\Omega) = 6$, $N(A) = 3$ και $N(\emptyset) = 0$.

Πράξεις με ενδεχόμενα

Στην ουσία, ενδεχόμενα και σύνολα είναι έννοιες ταυτόσημες. Γι' αυτό το λόγο οποιαδήποτε πράξη ενδεχομένων είναι και πράξη συνόλων. Αυτές τις περιγράψαμε σε προηγούμενη ενότητα, γι αυτό εδώ θα τις παρουσιάσουμε συνοπτικά, εμπλουτισμένες όμως με την ορολογία των πιθανοτήτων.

1. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α,Β.
2. Το ενδεχόμενο $A \cap B$ διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.
3. Το ενδεχόμενο $A - B$ διαβάζεται "Α διαφορά Β" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β.
4. Το ενδεχόμενο A' διαβάζεται "Α συμπλήρωμα" ή "όχι Α" και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα
Σωστό ή Λάθος

1 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι πεπερασμένος. . . . . . **Σ Λ**

2 Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγ. χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους. **Σ Λ**

3 Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι επίσης ξένα μεταξύ τους. . . . . . . **Σ Λ**

4 Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγμ. χ. Ω είναι πάντα συμπληρωματικά. **Σ Λ**

5 Ασυμβίβαστα λέγονται δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω όταν η ένωσή τους είναι το κενό σύνολο. . . . . **Σ Λ**

6 Το συμπλήρωμα A' ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του δειγματικού χώρου. . . . **Σ Λ**

7 Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Β και δεν πραγματοποιείται

το Α. . . . . **Σ Λ**

8 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, τότε τα ενδεχόμενα $(A \cap B)$ και $(A \cap B')$ είναι ξένα μεταξύ τους . . . . **Σ Λ**

9 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, τότε ισχύει ότι $A \cap B \subseteq A$. . . . . **Σ Λ**

10 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, τότε ισχύει ότι $A \subseteq A \cup B$. . . . . **Σ Λ**

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 1.1.1 Ο ταξιδιωτικός σάκος ενός φοιτητή περιέχει 4 πουκάμισα, 3 παντελόνια και 2 ζευγάρια παπούτσια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να ντυθεί ο φοιτητής κατά την πρώτη έξοδό του;

Λύση 1.1.1 Υπάρχουν 4 τρόποι να διαλέξει πουκάμισο, 3 τρόποι να διαλέξει παντελόνι και 2 τρόποι να διαλέξει παπούτσια. Συνολικά δηλαδή, υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ διαφορετικοί τρόποι να ντυθεί.

Άσκηση 1.1.2 Πόσες λέξεις με τρείς χαρακτήρες μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας ελληνικά γράμματα;

Λύση 1.1.2 Για τον πρώτο χαρακτήρα μπορούμε να επιλέξουμε ένα από τα 24 γράμματα. Το ίδιο γαι τον δεύτερο και τρίτο χαρακτήρα. Μπορούμε δηλαδή συνολικά να κατασκευάσουμε $24 \cdot 24 \cdot 24 = 13824$ διαφορετικές τέτοιες λέξεις.

Άσκηση 1.1.3 Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια με τρία παιδιά και μας ενδιαφέρει το φύλο των παιδιών ως προς τη σειρά γέννησής τους. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος;

Λύση 1.1.3 Χρησιμοποιώντας Α για αγόρι και Κ για κορίτσι, μπορούμε να πούμε : Το πρώτο παιδί είναι Α ή Κ και παρόμοια το δεύτερο και το τρίτο. Ο δειγματοχώρος τελικά περιέχει $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ στοιχεία τα οποία μπορούμε εύκολα να αριθμήσουμε κατασκευάζοντας το κατάλληλο δεντροδιάγραμμα. Συγκεκριμένα θα είναι:

$$\Omega = \{AAA, \quad AAK, \quad AKA, \quad AKK, \quad KAA, \quad KAK, \quad KKA, \quad KKK\}$$

Άσκηση 1.1.4 Ρίχνουμε ένα ζάρι έως ότου φέρουμε "Γράμματα". Ποιος είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος;

Λύση 1.1.4 Συμβολίζοντας με Κ για το ενδεχόμενο "Κεφαλή" και Γ για το ενδεχόμενο "Γράμματα", έχουμε :

$$\Omega = \{\text{Γ}, \quad \text{ΚΓ}, \quad \text{ΚΚΓ}, \quad \text{ΚΚΚΓ}, \quad \text{ΚΚΚΚΓ}, \quad \text{ΚΚΚΚΚΓ}, \quad \cdots\}$$

Παρατηρείστε ότι ο δειγματοχώρος έχει άπειρα σημεία. Το γεγονός αυτό δεν βλάπτει τη θεωρία και εύκολα μπορεί να αποδείξει κάποιος ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των σημείων του δειγματοχώρου είναι ίσο με 1, διότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\dots = 1$$

Άσκηση 1.1.5 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και έστω τα ενδεχόμενα
Α: Το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7.
Β: Το γινόμενο των ενδείξεων διαιρείται με 3.
Γ: Η ένδειξη της δεύτερης ρίψης είναι μεγαλύτερη της πρώτης. Να βρείτε τα στοιχεία των ενδεχομένων

$$\text{α) } A\cap B \quad \text{β) } A\cap \Gamma \quad \text{γ) } A\cup \Gamma$$

Λύση 1.1.5 Γράφουμε αναλυτικά τον δειγματοχώρο :

$$\begin{aligned}\Omega = \{&11, & 12, && 13, && 14, && 15, && 16,\\ &21, & 22, && 23, && 24, && 25, && 26,\\ &31, & 32, && 33, && 34, && 35, && 36,\\ &41, & 42, && 43, && 44, && 45, && 46,\\ &51, & 52, && 53, && 54, && 55, && 56,\\ &61, & 62, && 63, && 64, && 65, && 66\}\end{aligned}$$

α) Το ενδεχόμενο Α αποτελείται από τα σημεία :

$$A = \{61, \quad 52, \quad 43, \quad 34, \quad 25, \quad 16\}$$

β) Το ενδεχόμενο Β αποτελείται από τα σημεία :

$$\begin{aligned}B = \{&13, & 16,\\ &23, & 26,\\ &31, & 32, && 33, && 34, && 35, && 36,\\ &43, & 46,\\ &53, & 56,\\ &61, & 62, && 63, && 64, && 65, && 66\}\end{aligned}$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

γ) Το ενδεχόμενο Γ αποτελείται από τα σημεία :

$$\Gamma = \{12, \; 13, \; 14, \; 15, \; 16,$$
$$23, \; 24, \; 25, \; 26,$$
$$34, \; 35, \; 36,$$
$$45, \; 46,$$
$$56\}$$

Θα είναι τότε

$$A \cap B = \{61, \; 43, \; 34, \; 16\}$$
$$A \cap \Gamma = \{34, \; 25, \; 16\}$$
$$A \cup \Gamma = \{12, \; 13, \; 14, \; 15, \; 16,$$
$$23, \; 24, \; 25, \; 26,$$
$$34, \; 35, \; 36,$$
$$45, \; 46,$$
$$56,$$
$$61, \; 52, \; 43\}$$

Άσκηση 1.1.6 Έστω Α, Β, Γ τρία οποιαδήποτε γεγονότα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να Βρείτε εκφράσεις για τα ακόλουθα ενδεχόμενα :

1. Μόνο το Α συμβαίνει.
2. Συμβαίνουν τα Α και Β αλλά όχι το Γ.
3. Συμβαίνουν και τα τρία.
4. Συμβαίνει τουλάχιστον ένα.
5. Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο.
6. Συμβαίνει ένα και κανένα άλλο.
7. Συμβαίνουν ακριβώς δύο.
8. Συμβαίνει κανένα.
8. Συμβαίνουν όχι περισσότερα από δύο.

Λύση 1.1.6 Θα είναι :

1: $A \cap B' \cap \Gamma'$

2: $A \cap B \cap \Gamma'$

3: $A \cap B \cap \Gamma$

4: $A \cup B \cup \Gamma$

5: $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

6: $(A \cap B' \cap \Gamma') \cup (A' \cap B \cap \Gamma') \cup (A' \cap B' \cap \Gamma)$

7: $(A \cap B \cap \Gamma') \cup (A \cap B' \cap \Gamma) \cup (A' \cap B \cap \Gamma)$

8: $A' \cap B' \cap \Gamma'$

9: $(A \cap B \cap \Gamma)'$

Άσκηση 1.1.7 Τρεις αριθμημένες μπάλες α,β και γ ρίχνονται τυχαία σε τρία αριθμημένα κιβώτια 1,2 και 3. Βρείτε όλα τα σημεία του δειγματοχώρου για αυτό το πείραμα τύχης.

Λύση 1.1.7 Είναι :

- α στο 1 { α | - | - }
  - β στο 1 { αβ | - | - }
    - γ στο 1 { αβγ | - | - } 1
    - γ στο 2 { αβ | γ | - } 2
    - γ στο 3 { αβ | - | γ } 3
  - β στο 2 { α | β | - }
    - γ στο 1 { αγ | β | - } 4
    - γ στο 2 { α | βγ | - } 5
    - γ στο 3 { α | β | γ } 6
  - β στο 3 { α | - | β }
    - γ στο 1 { αγ | - | β } 7
    - γ στο 2 { α | γ | β } 8
    - γ στο 3 { α | - | βγ } 9
- α στο 2 { - | α | - }
  - β στο 1 { β | α | - }
    - γ στο 1 { βγ | α | - } 10
    - γ στο 2 { β | αγ | - } 11
    - γ στο 3 { β | α | γ } 12
  - β στο 2 { - | αβ | - }
    - γ στο 1 { γ | αβ | - } 13
    - γ στο 2 { - | αβγ | - } 14
    - γ στο 3 { - | αβ | γ } 15
  - β στο 3 { - | α | β }
    - γ στο 1 { γ | α | β } 16
    - γ στο 2 { - | αγ | β } 17
    - γ στο 3 { - | α | βγ } 18
- α στο 3 { - | - | α }
  - β στο 1 { β | - | α }
    - γ στο 1 { βγ | - | α } 19
    - γ στο 2 { β | γ | α } 20
    - γ στο 3 { β | - | αγ } 21
  - β στο 2 { - | β | α }
    - γ στο 1 { γ | β | α } 22
    - γ στο 2 { - | βγ | α } 23
    - γ στο 3 { - | β | αγ } 24
  - β στο 3 { - | - | αβ }
    - γ στο 1 { γ | - | αβ } 25
    - γ στο 2 { - | γ | αβ } 26
    - γ στο 3 { - | - | αβγ } 27

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 1.1.8 Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να εκφράσετε με τη βοήθεια των συνόλων τα παρακάτω ενδεχόμενα :

i) «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β»
ii) «δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β»
iii) «πραγματοποιείται το Α και όχι το Β»
iv) «πραγματοποιείται το Β και όχι το Α»
v) «πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α, Β»

Άσκηση 1.1.9 Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και μετά ένα ζάρι. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

Άσκηση 1.1.10 Δύο κιβώτια α και β περιέχουν πορτοκάλια (Π), μήλα (Μ) και αχλάδια (Α). Το κιβώτιο α περιέχει 1 μήλο, 1 πορτοκάλι και 1 αχλάδι, ενώ το κιβώτιο β περιέχει 1 μήλο και 1 αχλάδι. Επιλέγουμε στην τύχη ένα κιβώτιο και στη συνέχεια ένα φρούτο από αυτό. Να βρείτε :

i) τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης,
ii) τα ενδεχόμενα :
Γ : «το φρούτο είναι μήλο»
Δ : « το φρούτο είναι αχλάδι»

Άσκηση 1.1.11 Ένα κιβώτιο έχει τρεις όμοιες ασφάλειες από τις οποίες οι δύο είναι ελαττωματικές. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης στις παρακάτω περιπτώσεις :

i) Ελέγχουμε τις ασφάλειες μία προς μία, χωρίς επανατοποθέτηση, μέχρι να βρούμε την πρώτη ελαττωματική ασφάλεια
ii) Ελέγχουμε τις ασφάλειες μία προς μία, χωρίς επανατοποθέτηση, μέχρι να βρούμε όλες τις ελαττωματικές ασφάλειες.

Άσκηση 1.1.12 Ένας αθλητής είναι μέλος ενός αθλητικού συλλόγου. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Α: «Ο αθλητής παίζει ποδόσφαιρο»

Β: «Ο αθλητής παίζει μπάσκετ» Να διατυπώσετε περιφραστικά καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα :

i) A' καιB'
ii) $A \cup B$ και $A \cap B$
iii) $A - B$ και $B - A$
iv) $(A \cup B)'$ και $(A \cap B)'$
v) $(A - B) \cup (B - A)$
vi) $A \cup B'$
vii) $A' \cup B$
viii) $A' \cap B'$

Άσκηση 1.1.13 Ελέγχονται τρεις κινητήρες α, β, γ ενός αεροσκάφους και σημειώνεται για τον καθένα η ένδειξη (Κ), όταν ο κινητήρας δεν έχει βλάβη και η ένδειξη (Ε), όταν ο κινητήρας έχει βλάβη. Να βρείτε:

i) τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης,
ii) τα ενδεχόμενα:
Α : « Δύο ακριβώς κινητήρες δεν έχουν βλάβη»
Β : « Δύο τουλάχιστον κινητήρες έχουν βλάβη»
Γ : « Δύο το πολύ κινητήρες έχουν βλάβη»
Δ : « Το πολύ ένας κινητήρας έχει βλάβη»
Ε : « Το πολύ ένας κινητήρας δεν έχει βλάβη»
iii) τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $B \cup \Delta$ και $B \cap \Delta$.

Άσκηση 1.1.14 Μια βιομηχανία ελέγχει τηλεοράσεις από τη γραμμή παραγωγής με τη σειρά που εξέρχονται. Ο έλεγχος σταματάει όταν βρεθούν 2 ελαττωματικές τηλεοράσεις ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 τηλεοράσεις. Να υπολογίσετε τα ενδεχόμενα :

Κ : «Να βρεθεί ακριβώς μία ελαττωματική τηλεόραση»
Λ : «Να βρεθούν ακριβώς δύο ελαττωματικές τηλεοράσεις»
Μ : «Να βρεθούν δύο τουλάχιστον μη ελαττωματικές τηλεοράσεις»
Ν : «Να βρεθούν το πολύ δύο μη ελαττωματικές τηλεοράσεις»

Άσκηση 1.1.15 Σε ένα κουτί υπάρχουν τέσσερις κιμωλίες χρώματος άσπρου (Α), μοβ (Μ), πράσινου (Π), και κίτρινου (Κ). Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

i) Επιλέγουμε τυχαία μια κιμωλία

ii) Επιλέγουμε τυχαία μια κιμωλία, την επανατοποθετούμε μέσα στο κουτί και στη συνέχεια επιλέγουμε και άλλη μια κιμωλία.
iii) Επιλέγουμε τυχαία μια κιμωλία και δεν την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε και άλλη μια κιμωλία.
iv) Επιλέγουμε ταυτόχρονα δύο κιμωλίες.

Άσκηση 1.1.16 Έστω Α, Β και Γ τρία ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των συνόλων και με τα αντίστοιχα διαγράμματα Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα.

i) «πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β και Γ»
ii) «πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β, αλλά όχι το Γ»
iii) «δεν πραγματοποιείται το Α, αλλά πραγματοποιείται το Β και το Γ»
iv) «πραγματοποιείται το Α, αλλά όχι το Β και το Γ»
v) «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β και Γ»
vi) «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α, Β και Γ»
vii) «πραγματοποιούνται ακριβώς δύο από τα Α, Β και Γ»

Άσκηση 1.1.17 Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

i) Ένα τμήμα έχει 30 μαθητές, όπου οι 20 γνωρίζουν αγγλικά και οι 15 γαλλικά. Επιλέγουμε ένα μαθητή και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α : «Ο μαθητής ξέρει αγγλικά»
Β : «Ο μαθητής ξέρει γαλλικά»
ii) Ένα τμήμα έχει 30 μαθητές, όπου το 40% ασχολείται με τον αθλητισμό και το 50% ασχολείται με τη μουσική. Επιλέγουμε ένα μαθητή και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α : «Ο μαθητής ασχολείται με τον αθλητισμό»
Β : «Ο μαθητής ασχολείται με τη μουσική»

Άσκηση 1.1.18 Από τη γραμμή παραγωγής ενός εργοστασίου ελέγχονται μικρά εξαρτήματα. Τα εξαρτήματα ταξινομούνται σε κανονικά (Κ), σε εκείνα που έχουν ελάττωμα εμφάνισης (Ε) και σε εκείνα που έχουν ελάττωμα λειτουργίας(Λ). Ο έλεγχος σταματάει μόλις βρεθούν 1 ελαττωματικό τύπου (Λ) ή 2 ελαττωματικά τύπου (Ε) ή όταν ελεγχθούν 3 εξαρτήματα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

Άσκηση 1.1.19 Ένας εκδοτικός οίκος εκδίδει βιβλία σε τρία μεγέθη, μεγάλο (Μ), κανονικό (Κ) και τσέπης (Τ). Τα βιβλία μεγέθους (Μ) εκδίδονται με χοντρό εξώφυλλο (Χ), τα μεγέθους (Τ) με λεπτό εξώφυλλο (Λ) και τα μεγέθους (Κ) με λεπτό ή χοντρό εξώφυλλο. Για τα βιβλία με χοντρό εξώφυλλο υπάρχουν δύο εκδόσεις, η απλή έκδοση (Α) και η πολυτελής (Π). Παίρνουμε στην τύχη ένα βιβλίο του εκδοτικού οίκου και σημειώνουμε με τη σειρά το μέγεθος, τον τύπο και την ποιότητα του εξωφύλλου του. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

Άσκηση 1.1.20 Ρίχνουμε ένα νόμισμα και σημειώνουμε το αποτέλεσμα κεφαλή (Κ) ή γράμματα (Γ) μέχρι να πάρουμε δύο φορές κεφαλή ή τρεις φορές γράμματα. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Σε πόσες το πολύ ρίψεις τελειώνει το πείραμα;

Άσκηση 1.1.21 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης τέτοια, ώστε $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι :

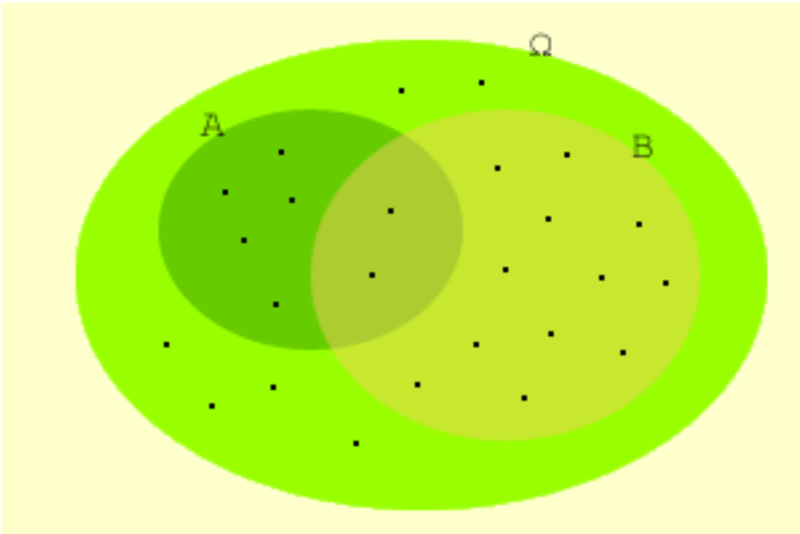
$$\text{i) } A \cap B = A \quad \text{ii) } A \cup B = B \quad \text{iii) } A - B = \emptyset \quad \text{iv) } B' \subseteq A'$$

1.2 Έννοια της Πιθανότητας

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Το παρακάτω σχήμα προτίθεται να περιγράψει τον δειγματικό χώρο Ω ενός υποθετικού πειράματος τύχης. Ο δειγματοχώρος Ω αποτελείται από 25 στοιχεία ή αλλιώς απλά ενδεχόμενα. Στο σχήμα έχουμε σκιαγραφήσει δύο (σύνθετα) ενδεχόμενα τα Α και Β και σύμφωνα με την ορολογία που έχουμε αναπτύξει ισχύουν

$$N(A) = 7, \quad N(B) = 14 \quad \text{και} \quad N(\Omega) = 25$$



Κλασική θεώρηση: Όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Αν θεωρήσουμε τότε ισοπίθανα και τα 25 απλά ενδεχόμενα του πειράματος, είναι εύλογο τότε να αποδώσουμε στα ενδεχόμενα Α και Β τις ακόλουθες πιθανότητες

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{25} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{14}{25}$$

Αυτή η θεώρηση, αποτέλεσε και τη βάση για τη διατύπωση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας ενός ενδεχομένου από τον Laplace το 1812.

Πιο συγκεκριμένα, με τον κλασικό ορισμό αν σε ένα πείραμα τύχης θεωρήσουμε όλα τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα, τότε ορίζουμε την πιθανότητα P(A) ενός ενδεχομένου Α με το ακόλουθο πηλίκο :

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από αυτόν τον ορισμό, προκύπτουν άμεσα τα ακόλουθα

1: $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}$

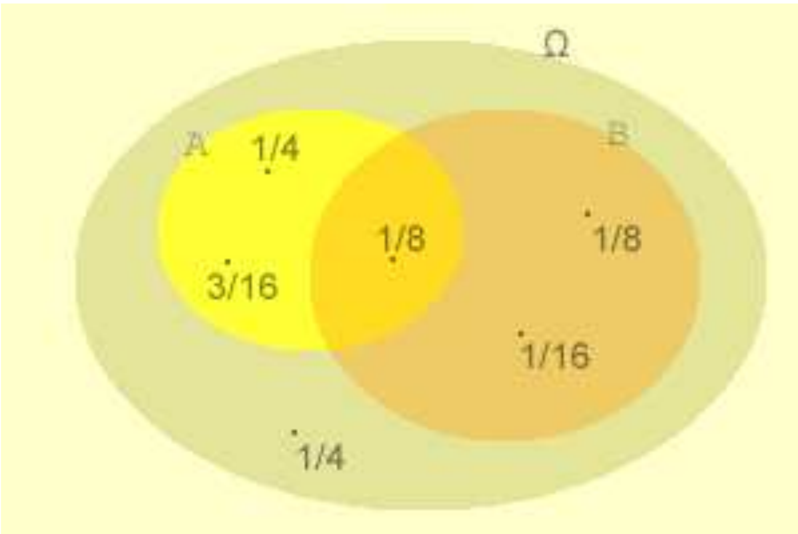
2: $P(\emptyset) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$

ενώ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α θα ισχύει

3: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ και $0 \leq P(A) \leq 1$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Είναι φανερό ότι ο περιορισμός των "ισοπίθανων" στον κλασικό ορισμό μπορεί να αρθεί χωρίς να βλάψουμε τη θεωρία. Άλλωστε υπάρχουν πολλά πειράματα τύχης των οποίων τα αποτελέσματα δεν είναι ισοπίθανα. Για να γίνουμε πιο παραστατικοί, ας θεωρήσουμε πάλι το ακόλουθο σχήμα το οποίο προτίθεται να περιγράψει τον μοντέρνο αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.



Αξιωματική θεώρηση

Η σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων ξεκινά από το σημείο όπου ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης έχει πλήρως οριστεί και έχουν οριστεί πιθανότητες για κάθε ένα από τα ενδεχόμενα του, όπως στο προηγούμενο σχήμα. Πιο συγκεκριμένα, το εν λόγω σχήμα περιγράφει τον δειγματοχώρο ενός πειράματος τύχης με έξι πιθανά ενδεχόμενα* και πιθανότητες τις αναγεγραμμένες. (Παρατηρείστε ότι το άθροισμα των πιθανότήτων όλων των ενδεχομένων είναι ίσο με 1).

Για τη γενική περίπτωση διατυπώνουμε :

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

* Το σχήμα θα μπορούσε να περιγράφει τον δειγματοχώρο της ρίψης ενός μη συμμετρικού ζαριού

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν :

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1$$
$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_\nu) = 1$$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \cdots + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Άν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε για τις πιθανότητες αυτών των ενδεχομένων θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1: Άν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

2: $P(A') = 1 - P(A)$

3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Σχόλια Στην περίπτωση 3 αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ενώ για τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ θα ισχύει ότι :

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

1.2 Έννοια της Πιθανότητας
Σωστό ή Λάθος

1 Αν Α, Β είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει η σχέση $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . . . . **Σ Λ**

2 Αν Α, Β είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει η σχέση $P(A \cup B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . . . . **Σ Λ**

3 Αν $P(A) + P(B) = 1$ τότε τα Α και Β είναι συμπληρωματικά ενδεχόμενα. . . . . **Σ Λ**

4 Αν $P(A) = 1$ τότε $A = \Omega$, όπου Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω. . . . **Σ Λ**

5 Αν $P(A) = 0$ τότε $A = \emptyset$, όπου Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω. . . . **Σ Λ**

6 Αν Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης τότε $P(\Omega) = 1$ . . . . **Σ Λ**

7 Η πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου ενός δειγμ. χ. Ω είναι $P(\emptyset) = 0$. . . **Σ** **Λ**

8 Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 < P(A) < 1$. . . . **Σ** **Λ**

9 Για κάποια ενδεχόμενα Α και Β ισχύει : $P(A) = \frac{3}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. . . . . . . **Σ** **Λ**

10 Αν τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα, τότε πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου Α ονομάζουμε τον αριθμό: $P(A) = \frac{N(\Omega)}{N(A)}$. . . . . . **Σ** **Λ**

11 Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση: $P(A - B) = P(A) - P(B)$ . . . . **Σ** **Λ**

12 Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση: $P(A \cup B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . . . . **Σ** **Λ**

13 Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση: $P(A) + P(A') = 1$ . . . . **Σ** **Λ**

14 Αν Α, Η είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει η σχέση $P(A) = P(A \cap H) \cup P(A \cap H')$ . . . . **Σ** **Λ**

1.2 Έννοια της Πιθανότητας
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 1.2.1 Επιλέγουμε τυχαία ένα αριθμό από το 1 έως και το 100. Ποια η πιθανότητα ο αριθμός που επιλέξαμε να περιέχει το ψηφίο 9.

Λύση 1.2.1 Εστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός που θα επιλέξουμε να περιέχει το ψηφίο 9. Θα είναι τότε

$$A = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89,$$
$$90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}$$

και

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$$

οπότε

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

Άσκηση 1.2.2 Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου ισχύουν

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{9}{10} \quad P(A \cap B) = \frac{9}{20}$$

Υπολογίστε :
α) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β.
β) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Β.
γ) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

Λύση 1.2.2 Επειδή ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ θα είναι

α) $$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{9}{10} + \frac{9}{20} - \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

β) $$P(\text{μόνο το } B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$$

γ) $$P(\text{κανένα από } A, B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Άσκηση 1.2.3 Θεωρούμε μια καλά ανακατεμένη τράπουλα και ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα για κάθε ένα από τα ακόλουθα ενδεχόμενα :

Α : Τραβάμε τυχαία ένα χαρτί. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί άσσος;
Β : Τραβάμε τυχαία ένα χαρτί. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί σπαθί;
Γ : Τραβάμε τυχαία δύο χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανίσουμε τουλάχιστον έναν άσσο;
Δ : Τραβάμε τυχαία δύο χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανίσουμε τουλάχιστον ένα σπαθί;

Λύση 1.2.3

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να αριθμήσουμε τα χαρτιά της τράπουλας από το 1 έως το 52. Ο δειγματοχώρος τότε είναι

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 52\}$$

και επειδή η τράπουλα έχει 4 άσσους θα είναι

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

2. Παρόμοια για το Β επειδή η τράπουλα έχει 13 σπαθιά θα είναι

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

3. Σ'αυτή την περίπτωση ο δειγματοχώρος περιέχει $52 \cdot 51$ στοιχεία. Το ενδεχόμενο Γ συμβαίνει όταν

i. Εμφανιστεί άσσος στο πρώτο τράβηγμα και στο δεύτερο άσσος ή οτιδήποτε άλλο, δηλαδή συνολικά $4\cdot 51 = 204$ στοιχεία, ή

ii. Δεν εμφανιστεί άσσος στο πρώτο τράβηγμα αλλά εμφανιστεί άσσος στο δεύτερο τράβηγμα, συνολικά $(52-4)\cdot 4 = 192$ στοιχεία. Θα είναι τότε

$$P(\Gamma) = \frac{4\cdot 51 + (52-4)\cdot 4}{52\cdot 51} = \frac{204+192}{52\cdot 51} = \frac{396}{2652} \approx 0{,}15$$

4. Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, ο δειγματοχώρος περιέχει $52\cdot 51$ στοιχεία. Το ενδεχόμενο Δ συμβαίνει όταν

i. Εμφανιστεί σπαθί στο πρώτο τράβηγμα και στο δεύτερο σπαθί ή οτιδήποτε άλλο, δηλαδή συνολικά $13\cdot 51 = 663$ στοιχεία, ή

ii. Δεν εμφανιστεί σπαθί στο πρώτο τράβηγμα αλλά εμφανιστεί σπαθί στο δεύτερο τράβηγμα, συνολικά $(52-13)\cdot 13 = 507$ στοιχεία. Θα είναι τότε

$$P(\Delta) = \frac{13\cdot 51 + (52-13)\cdot 13}{52\cdot 51} = \frac{663+507}{52\cdot 51} = \frac{1170}{2652} \approx 0{,}44$$

Άσκηση 1.2.4 Αν $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 20\}$ να υπολογίσετε τις πιθανότητες για τα ακόλουθα ενδεχόμενα :

Α: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 2.

Β: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 5.

Γ: τα στοιχεία του Ω που διαιρούνται με το 2 και το 5.

Λύση 1.2.4 Είναι :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \quad \text{και} \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{11}{21}$$

$$B = \{0, 5, 10, 15, 20\} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{21}$$

$$\Gamma = \{0, 10, 20\} \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{3}{21}$$

Άσκηση 1.2.5 Η πιθανότητα να μη λύσει ένας μαθητής ένα πρόβλημα πιθανοτήτων είναι διπλάσια από την πιθανότητα να το λύσει. Να βρεθεί η πιθανότητα να λύσει ο μαθητής το πρόβλημα.

Λύση 1.2.5 Έστω Α: ο μαθητής λύνει το πρόβλημα, και A': ο μαθητής δε λύνει το πρόβλημα. Θα είναι τότε :

$$\begin{cases} P(A') = 1 - P(A) \\ P(A') = 2P(A) \end{cases} \Rightarrow 1 - P(A) = 2P(A) \Leftrightarrow 3P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 1.2.6 Ρίχνονται δύο ζάρια. Έστω Α το ενδεχόμενο ότι το άθροισμα των αριθμών που θα έλθουν είναι περιττό και Β το ενδεχόμενο ότι θα έλθει τουλάχιστον ένας άσσος.

Να υπολογίσετε τότε τις πιθανότητες :

$$\alpha)\ P(A \cap B) \quad \beta)\ P(A \cup B) \quad \gamma)\ P(A \cap B')$$

Λύση 1.2.6 Γράφουμε αναλυτικά :

$$\begin{aligned} \Omega = \{&11, && 12, && 13, && 14, && 15, && 16, \\ &21, && 22, && 23, && 24, && 25, && 26, \\ &31, && 32, && 33, && 34, && 35, && 36, \\ &41, && 42, && 43, && 44, && 45, && 46, \\ &51, && 52, && 53, && 54, && 55, && 56, \\ &61, && 62, && 63, && 64, && 65, && 66\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = \{&12, && 14, && 16, \\ &21, && 23, && 25, \\ &32, && 34, && 36, \\ &41, && 43, && 45, \\ &52, && 54, && 56, \\ &61, && 63, && 65, && \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{&11, && 12, && 13, && 14, && 15, && 16, \\ &21, && 31, && 41, && 51, && 61\} \end{aligned}$$

Θα είναι τότε :

α) $A \cap B = \{12, \quad 14, \quad 16, \quad 21, \quad 41, \quad 61\}$

οπότε

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

β) $$\begin{aligned} A \cup B = \{&11, && 12, && 13, && 14, && 15, && 16, \\ &21, && 23, && 25, \\ &31, && 32, && 34, && 36, \\ &41, && 43, && 45, \\ &51, && 52, && 54, && 56, \\ &61, && 63, && 65\} \end{aligned}$$

οπότε

$$P(A \cup B) = \frac{23}{36}$$

και τέλος

γ) $A \cap B' = \{23, \ 25, \ 32, \ 34, \ 36, \ 43$
$45, \ 52, \ 54, \ 56, \ 63, \ 65\}$
οπότε
$$P(A \cap B') = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 1.2.7 Τρεις αριθμημένες μπάλες α,β και γ ρίχνονται τυχαία σε τρία αριθμημένα κιβώτια 1,2 και 3. Υπολογίστε τις πιθανότητες για τα ακόλουθα ενδεχόμενα :
Α: Ακριβώς ένα κιβώτιο είναι άδειο.
Β: Κανένα κιβώτιο δεν είναι άδειο.

Λύση 1.2.7 Τον δειγματοχώρο για αυτό το πείραμα τύχης τον κατασκευάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Αναφερόμενοι σε αυτον τον δειγματοχώρο, όπου για ευκολία αριθμήσαμε τα σημεία του. Έχουμε ότι το Α πραγματοποιείται στα σημεία

$A = \{2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 7, \ 9,$
$10, \ 11, \ 13, \ 15, \ 17, \ 18,$
$19, \ 21, \ 23, \ 24, \ 25, \ 26\}$
οπότε
$$P(A) = \frac{18}{27}$$

Ενώ για το Β θα έχουμε :

$B = \{6, \ 8, \ 12, \ 16, \ 20, \ 22\}$
οπότε
$$P(B) = \frac{6}{27}$$

1.2 Έννοια της Πιθανότητας
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 1.2.8 Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

Α: «η ένδειξη είναι άρτια»

Β: «η ένδειξη είναι περιττή»

Γ: «η ένδειξη είναι άρτια και ταυτόχρονα μεγαλύτερη από 4»

Άσκηση 1.2.9 Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα φύλλο στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «το φύλλο είναι κόκκινο»

Β: «το φύλλο είναι άσος»

Γ: «το φύλλο δεν είναι άσος»

Δ: «το φύλλο είναι κόκκινο και δεν είναι άσος»

Άσκηση 1.2.10 Σε ένα κουτί έχουμε 4 πράσινες, 10 κόκκινες και 6 άσπρες σφαίρες. Αν πάρουμε μια σφαίρα στην τύχη, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

Α: «η σφαίρα είναι κόκκινη»

Β: «η σφαίρα δεν είναι πράσινη»

Γ: «η σφαίρα είναι κόκκινη ή δεν είναι πράσινη»

Άσκηση 1.2.11 Σε ένα κουτί έχουμε 3 λαχνούς με τους αριθμούς 1,2 και 3. Παίρνουμε τυχαία έναν λαχνό, γράφουμε τον αριθμό του και τον επανατοποθετούμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα ακόμη μια φορά γράφοντας το δεύτερο αποτέλεσμα δεξιά του πρώτου.

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «ο διψήφιος αριθμός που προκύπτει διαιρείται με το 2»

Β: «ο διψήφιος αριθμός που προκύπτει έχει 2 ίδια ψηφία»

Άσκηση 1.2.12 Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν

$$P(A') = \lambda P(B) \text{ και } P(B') = \lambda P(A) \text{ όπου } \lambda \in R - \{1\}$$

να αποδείξετε ότι

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Άσκηση 1.2.13 Έστω μια τράπουλα με 52 φύλλα.

i) Επιλέγουμε ένα φύλλο στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
   A: «το φύλλο είναι κόκκινο»
   B: «το φύλλο είναι σπαθί»
   Γ: «το φύλλο είναι 2 ή 3»
   Δ: «το φύλλο είναι φιγούρα»

ii) Επιλέγουμε ένα φύλλο, χωρίς επανατοποθέτηση και σημειώνουμε την ένδειξή του. Στη συνέχεια επιλέγουμε ακόμη ένα φύλλο. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
   A: «το δεύτερο φύλλο είναι άσσος», με δεδομένο ότι το πρώτο φύλλο είναι άσσος,
   B: «το δεύτερο φύλλο είναι μαύρο», με δεδομένο ότι το πρώτο φύλλο είναι κόκκινο.

Άσκηση 1.2.14 Σε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu\}$ δίνεται ότι $P(\alpha_\kappa) = \kappa x$, $\kappa = 1, 2, \cdots, \nu$, να υπολογίσετε :

i) το x ως συνάρτηση του ν,

ii) την πιθανότητα $P(\alpha_\kappa)$ ως συνάρτηση του ν και του κ.

Άσκηση 1.2.15 Από τις οικογένειες 30 μαθητών μιας τάξης, 25 έχουν βίντεο, 5 έχουν DVD και 4 έχουν βίντεο και DVD. Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «η οικογένεια έχει μόνο βίντεο»
B: «η οικογένεια έχει μόνο βίντεο ή μόνο DVD»
Γ: «η οικογένεια έχει μια τουλάχιστον συσκευή»
Δ: «η οικογένεια δεν έχει καμία συσκευή»

Άσκηση 1.2.16 Από τους επιβάτες ενός λεωφορείου οι 12 είναι άνδρες και οι 18 γυναίκες. Έξι από τους άνδρες και οκτώ από τις γυναίκες είναι πάνω από 40 ετών. Επιλέγουμε τυχαία έναν επιβάτη του λεωφορείου. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «ο επιβάτης είναι πάνω από 40 ετών»
B: «ο επιβάτης είναι κάνω από 40 ετών»
Γ: «ο επιβάτης είναι άνδρας»

Άσκηση 1.2.17 (θέμα 2001) Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παρακάτω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν της αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική.

i) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα
ii) Να αποδείξετε ότι :

$$P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}$$

iii) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.
iv) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

Άσκηση 1.2.18 Ένα δείγμα 50 οικογενειών ρωτήθηκε ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4	≥ 5
Αριθμός οικογενειών	6	14	13	9	5	3

Επιλέγουμε τυχαία μια από 50 οικογένειες. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: «η οικογένεια δεν έχει παιδιά»
Β: «η οικογένεια έχει παιδιά αλλά όχι περισσότερα από 3»
Γ: «η οικογένεια έχει περισσότερα από 3παιδιά»
Δ: «η οικογένεια δεν έχει 3 ή 4 παιδιά»
Ε: «η οικογένεια έχει λιγότερα από 2 ή περισσότερα από 4 παιδιά»

Άσκηση 1.2.19 Έστω ότι από 10000 σπόρους που φυτεύτηκαν, θα φυτρώσει το 90%. Από τα φυτά που θα φυτρώσουν, μόνο το 90% θα ζήσει μέχρι και να καρποφορήσει. Αν φυτέψουμε έναν σπόρο ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: «ο σπόρος δεν φυτρώνει»
Β: «ο σπόρος φυτρώνει, αλλά πεθαίνει»
Γ: «ο σπόρος καρποφορεί»

Άσκηση 1.2.20 Από τους 160 μαθητές ενός σχολείου, για την απασχόληση τις ελεύθερες ώρες τους, 84 επέλεξαν αθλητικά (Α), 66 ζωγραφική (Ζ) και 36 μουσική (Μ). Κανένας από τους μαθητές δεν επέλεξε ταυτόχρονα μουσική και ζωγραφική, 12 επέλεξαν ταυτόχρονα μουσική και αθλητικά και έστω x ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν ταυτόχρονα αθλητικά και ζωγραφική.

i) Να παρουσιάσετε τις παρακάνω πληροφορίες με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn.
ii) Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν και αθλητικά και ζωγραφική
iii) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
A_1: «ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο αθλητικά»
A_2: «ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο μουσική»
A_3: «ο μαθητής έχει επιλέξει αθλητικά και μουσική»
A_4: «ο μαθητής έχει επιλέξει αθλητικά ή ζωγραφική»
A_5: «ο μαθητής έχει επιλέξει μουσική και ζωγραφική»
A_6: «ο μαθητής έχει επιλέξει αθλητικά ή μουσική»

Άσκηση 1.2.21 Μια κληρωτίδα περιέχει 50 κλήρους αριθμημένους από το 1 ως το 50. Τραβάμε τυχαία έναν κλήρο. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
Α : «ο αριθμός είναι πολλαπλάσιος του 6 ή του 4»
Β : «ο αριθμός είναι πολλαπλάσιος μόνο του 4 ή μόνο του 6»

Άσκηση 1.2.22 Έστω Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι :

i) $P(A \cap B) \leq P(A)$
ii) $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

Άσκηση 1.2.23 Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι:

i)$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
ii)$P(A \cup B \cup \Gamma) \leq P(A) + P(B) + P(\Gamma)$

Άσκηση 1.2.24 (θέμα 1994) Έστω $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$. Να αποδείξετε ότι:
i) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$
ii) το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το $\emptyset$.

Άσκηση 1.2.25 Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,8$.
i) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
ii) Να αποδείξετε ότι :

α) $P(A \cup B) \geq 0,6$ β) $P(A \cap B) \leq 0,8$ γ) $P(A \cap B) \geq 0,4$

Άσκηση 1.2.26 (θέμα 2003) Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

i) γυναίκα ή φιλόλογος
ii) γυναίκα και όχι φιλόλογος
iii) άνδρας και φιλόλογος
iv) άνδρας ή φιλόλογος

Άσκηση 1.2.27 Έστω Α, Β και Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι:

i) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$
ii) $P(A \cap B \cap \Gamma) \geq P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Πράξεις και Ιδιότητες Πραγματικών

Οι ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών, καθώς και η αντιστοίχιση αυτών με τον άξονα των πραγματικών είναι ήδη γνωστές από το Γυμνάσιο. Επαναλαμβάνοντας, σημειώνουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζονται δύο πράξεις, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, και με τη βοήθειά τους αυτές της αφαίρεσης και της διαίρεσης.

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (αξιώματα) τις οποίες παραθέτουμε στον επόμενο πίνακα.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=a$
Αντίθετος - Αντίστροφος	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\quad \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	

Ο αριθμός 0 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ενώ ο αριθμός 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται βάση της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα ως εξής :

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\quad \beta\neq 0$$

Επιπλέον, αν α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

1. Μπορούμε να προσθέσουμε δύο εξισώσεις κατά μέλη

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$$

2. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο εξισώσεις κατά μέλη

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta$$

3. Μπορούμε στα μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

4. Μπορούμε τα μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο η μηδενικό αριθμό

$$\text{Αν} \quad \gamma \neq 0 \quad \text{τότε} \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

5. Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το 0, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον εκ των αριθμών είναι ίσος με το 0.

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$$

Δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη Αν α είναι πραγματικός και ν είναι φυσικός τότε α^ν ορίζεται ως

$$\alpha^\nu = \begin{cases} \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, & \nu > 1 \\ \alpha \quad \text{για} & \nu = 1 \end{cases}$$

Αν επιπλέον $\alpha \neq 0$ τότε ορίζονται και

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Σχόλιο Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$, τό αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Για παράδειγμα

$$(-2)^2 = 2^2 \quad \text{αλλά} \quad -2 \neq 2$$

Ιδιότητες δυνάμεων Στον επόμενο πίνακα συνοψίζουμε ιδιότητες των δυνάμεων :

1, $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$

2, $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$

3, $(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$

4, $\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = (\alpha \cdot \beta)^\kappa$

5, $\dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες Για ευχέρεια στην εκτέλεση πράξεων σε διάφορες αλγεβρικές παραστάσεις, ο μαθητής θα πρέπει να απομνημονεύσει τις ακόλουθες αξιοσημείωτες ταυτότητες :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$
$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

Μέθοδοι απόδειξης

1. Ευθεία απόδειξη : Είναι η μέθοδος της απόδειξης κατα την οποία ξεκινούμε από την υπόθεση και προσπαθούμε με λογικές συνεπαγωγές να φτάσουμε στο συμπέρασμα.
2. Μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο : Είναι η μέθοδος της απόδειξης κατα την οποία προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η άρνηση του συμπεράσματος δεν ισχύει.

2.1 Πράξεις και Ιδιότητες Πραγματικών
Σωστό ή Λάθος

1 Ισχύει $-1^{2011} = -1^{2013}$ . . . . **Σ** **Λ**

2 Ισχύει $1000^0 = 10^3$ . . . . **Σ** **Λ**

3 Ισχύει $(\alpha-\beta)^2 = (\beta-\alpha)^2$ . . . . **Σ** **Λ**

4 Ισχύει $(\alpha-\beta)^3 = (\beta-\alpha)^3$ . . . . **Σ** **Λ**

5 Αν α περιττός, τότε α^2 είναι άρτιος. . . . . **Σ** **Λ**

6 Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος. . . . . **Σ** **Λ**

2.1 Πράξεις και Ιδιότητες Πραγματικών
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 2.1.1 Αν

$$\alpha = -\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{2}{3}$$

να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\text{(i)}\ -3\alpha^2\beta^2, \quad \text{(ii)}\ -3\alpha^{-2}\beta^2, \quad \text{(iii)}\frac{5\beta^2}{\alpha^{-3}}$$

Λύση 2.1.1 Θα είναι :

$$\text{i)}\quad -3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -3\frac{1}{9}\frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$

$$\text{ii)}\quad -3\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -3(-3)^2\left(\frac{4}{9}\right) = -3\cdot 9\cdot\frac{4}{9} = -12$$

$$\text{iii)}\quad \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}} = \frac{5\cdot\frac{4}{9}}{(-3)^3} = \frac{20}{-3^3\cdot 3^2} = -\frac{20}{3^5} = -\frac{20}{243}$$

Άσκηση 2.1.2 Να γραφτούν ως δύναμη ενός αριθμού τα γινόμενα

$$8\cdot 125, \qquad (-27)\cdot 64, \qquad (-64)\cdot(-4)\cdot 16, \qquad \left(-\frac{1}{8}\right)(-27)\left(-\frac{1}{125}\right)$$

Λύση 2.1.2 Έχουμε :

α) $8 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

β) $(-27) \cdot 64 = (-3)^3 \cdot 4^3 = (-3 \cdot 4)^3 = (-12)^3$

γ) $(-64) \cdot (-4) \cdot 16 = (-8^2)(-2^2) \cdot 16 = 8^2 \cdot 2^2 \cdot 16 = (8 \cdot 2)^2 \cdot 16 = 16^3$

δ) $$\left(-\frac{1}{8}\right)(-27)\left(-\frac{1}{125}\right) = \left(-\frac{1}{2^3}\right)(-3^3)\left(-\frac{1}{5^3}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3(-3)^3\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{10}\right)^3$$

Άσκηση 2.1.3 Να γραφτούν με τη μορφή μιας δύναμης οι παραστάσεις

$$\frac{\alpha^{-2}\alpha^0\alpha^{-3}}{\alpha^{-8}} \quad \frac{\alpha^{-\nu}}{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^3} \quad (\alpha^{\mu\nu})^{-1}\beta^{\mu\nu}$$

Λύση 2.1.3 Είναι :

α) $\dfrac{\alpha^{-2}\alpha^0\alpha^{-3}}{\alpha^{-8}} = \alpha^{-2+0-3+8} = \alpha^3$

β) $\dfrac{\alpha^{-\nu}}{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^3} = \alpha^{-\nu-\mu-3}$

γ) $(\alpha^{\mu\nu})^{-1}\beta^{\mu\nu} = \alpha^{-\mu\nu}\beta^{\mu\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\mu\nu}$

Άσκηση 2.1.4 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{x^{-4}y^2(x^{-1}y^{-2})^4(x^{-2}y)^{-1}}{(x^2y)^{-2}y^{-3}}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της Α αν $x = (-10)^{-5}$ και $y = -10^4$.

Λύση 2.1.4 Είναι :

$$A = \frac{x^{-4}y^2(x^{-1}y^{-2})^4(x^{-2}y)^{-1}}{(x^2y)^{-2}y^{-3}}$$
$$= \frac{x^{-4}y^2(x^{-4}y^{-8})(x^2y-1)}{(x^{-4}y^{-2})y^{-3}}$$
$$= \frac{x^{-4-4+2}y^{2-8-1}}{x^{-4}y^{-2-3}}$$
$$= \frac{x^{-6}y^{-7}}{x^{-4}y^{-5}} = x^{-2}y^{-2}$$

Για $x = (-10)^{-5}$ καιy $= -10^4$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
A &= ((-10)^{-5})^{-2}(-10^4)^{-2} \\
&= (-1)^{-2}((10)^{-5})^{-2}(-1)^{-2}(10^4)^{-2} \\
&= 10^{10}\cdot 10^{-8} = 100
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.1.5 Βρείτε τα τετράγωνα των ακόλουθων παραστάσεων:

$$
\begin{aligned}
&\alpha-3\beta,\quad 3x+7y,\quad \alpha\beta-\gamma,\\
&\alpha^2-x^2-y^2,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\\
&\alpha-\beta+x-y,\quad x^2-1
\end{aligned}
$$

Λύση 2.1.5 Κάνουμε χρήση των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων και εκτελούμε πράξεις. Θα είναι τότε :

$$
\begin{aligned}
(\alpha-3\beta)^2 &= \alpha^2-2\cdot 3\alpha\beta+(-3\beta)^2 \\
&= \alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3x+7y)^2 &= (3x)^2+2(3x)(7y)+(7y)^2 \\
&= 9x^2+42xy+49y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta-\gamma)^2 &= (\alpha\beta)^2-2(\alpha\beta)\gamma+(-\gamma)^2 \\
&= \alpha^2\beta^2-2\alpha\beta\gamma+\gamma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha^2-x^2-y^2)^2 &= (\alpha^2)^2+(-x^2)^2+(-y^2)^2+2\alpha^2(-x^2)+2\alpha^2(-y^2)+2(-x^2)(-y^2) \\
&= \alpha^4+x^4+y^4-2\alpha^2x^2-2\alpha^2y^2+2x^2y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 &= (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+2(\alpha\beta)(\beta\gamma)+2(\alpha\beta)(\gamma\alpha)+2(\beta\gamma)(\gamma\alpha) \\
&= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta\gamma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta+x-y)^2 &= (\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta)(x-y)+(x-y)^2 \\
&= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2(\alpha x-\alpha y-\beta x+\beta y)+x^2-2xy+y^2 \\
&= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha x-2\alpha y-2\beta x+2\beta y+x^2-2xy+y^2 \\
&= \alpha^2+\beta^2+x^2+y^2-2\alpha\beta+2\alpha x-2\alpha y-2\beta x+2\beta y-2xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)^2 &= (x^2)^2-2(x^2)+1^2 \\
&= x^4-2x^2+1
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.1.6 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις :

i) $\alpha x - \beta y + \beta x - \alpha y$
ii) $x^3 - x^2 - x + 1$

Λύση 2.1.6 Για την i) έχουμε

$$\begin{aligned}&\alpha x - \beta y + \beta x - \alpha y\\ &= (\alpha x - \alpha y) + (\beta x - \beta y)\\ &= \alpha(x - y) + \beta(x - y)\\ &= (x - y)(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

ενώ για την ii) :

$$\begin{aligned}&x^3 - x^2 - x + 1\\ &= (x^3 - x^2) - (x - 1)\\ &= x^2(x - 1) - (x - 1)\\ &= (x - 1)(x^2 - 1)\\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 1)\\ &= (x - 1)^2(x + 1)\end{aligned}$$

Άσκηση 2.1.7 Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha\beta\gamma \neq 0 \text{ και } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

να αποδειχθεί ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Λύση 2.1.7 Η συνθήκη μετασχηματίζεται ως

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow\\ &\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\alpha\beta\gamma = 0 \cdot \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow\\ &\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) =\\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot 0\\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\end{aligned}$$

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

2.1 Πράξεις και Ιδιότητες Πραγματικών
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 2.1.8 Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις :

$$A=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} \qquad B=\frac{\frac{3}{7}}{4} \qquad \Gamma=\frac{5}{\frac{2}{9}} \qquad \Delta=\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Άσκηση 2.1.9 Να γίνουν οι πράξεις:

$$1)\ \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma} \qquad 2)\ \frac{3-x}{x-2}-\frac{x^2+4}{2x^3-8x}+\frac{x+3}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}$$

Άσκηση 2.1.10 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$1)\ \frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x} \qquad 2)\ \frac{3}{x+2y}-\frac{2}{x-2y}+\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$$

$$3)\ \frac{y^2-6}{y^2-5y+6}-\frac{2}{y-2}+\frac{3}{y-3} \qquad 4)\ \frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{x+y}-\frac{2xy^2}{x^2-y^2}$$

Άσκηση 2.1.11 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A=\left[\frac{(x-1)^2(x-1)^{-4}}{(x-1)^{-3}}\right]^{-2}$$

$$B=\frac{7x^3y^{-1}-x^3y^{-1}}{y^3x^5}$$

Άσκηση 2.1.12 Να γίνουν οι πράξεις:

$$1)\ \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2} \qquad 2)\ \frac{x}{1+\frac{x}{2+\frac{x}{3}}}$$

Άσκηση 2.1.13 Βρείτε τους κύβους των:

$$\alpha+x,\quad 2\alpha+\beta,\quad \frac{x}{3}+2,\quad \alpha^2-y^2$$

Άσκηση 2.1.14 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί

$$A = \alpha + 5\beta + 9\gamma \quad \text{και} \quad B = -\alpha = 5\Big((-\beta) + (-\gamma)\Big) + 4(-\gamma)$$

είναι αντίθετοι.

Άσκηση 2.1.15 Βρείτε τις συνθήκες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις :

i) $(7\alpha + 3)(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$

ii) $(\alpha + 1)(2\alpha + 5)(\alpha - 3) \neq 0$

Άσκηση 2.1.16 Αποδείξτε τις ταυτότητες :

$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$ ταυτότητα Legendre

$(\alpha + \beta)^3(\alpha - \beta) - (\alpha^4 - \beta^4) = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$

$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta - 1) - 1 = (\alpha + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + \alpha + \beta + 1)$

$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) + 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) + 2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$

Άσκηση 2.1.17 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις :

i) $9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2$ ii) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ iii) $3x^2 + 6xy + 3y^2$

Άσκηση 2.1.18 Να γραφούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις :

i) $\alpha^2 - 25\beta^2\gamma^2$ ii) $x^3 - 125$ iii) $y^3 - 27$ iv) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$

Άσκηση 2.1.19 Αποδείξτε τις ταυτότητες :

$(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$

$(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$

$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

Άσκηση 2.1.20 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\text{i) } x^2 - xy + 4y - 4x \quad \text{ii) } x^3 + x^2 + 3x + 3 \quad \text{iii) } 1 - x^2 - 2xy - y^2$$

Άσκηση 2.1.21 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\text{i) } \alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2 \quad \text{ii) } \alpha^4 + 4\beta^4 \quad \text{iii) } \alpha^8 - \beta^8$$

Άσκηση 2.1.22 Αν

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$\text{i) } x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{ii) } x^3 + \frac{1}{x^3} \quad \text{iii) } x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Άσκηση 2.1.23 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα (με την προυπόθεση ότι αυτά ορίζονται) :

$$\text{i) } \frac{\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y}{x^2 - y^2} \quad \text{ii) } \frac{36x^2 - 12x + 1}{48x - 8}$$

$$\text{iii) } \frac{16\alpha^2\beta^3 - 8\alpha^3\beta^3}{4\alpha^2\beta^2} \quad \text{iv) } \frac{(x+h)^2}{h}$$

$$\text{v) } \frac{x^2 - 1}{(1-x)^2} \quad \text{vi) } \frac{x^2 - 9y^2}{2x^2 - 12xy + 18y^2}$$

Άσκηση 2.1.24 Αποδείξτε τις ταυτότητες του Newton:

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x + \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{aligned}&(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) = \\ &= x^4 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)x^2 + (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) + \alpha\beta\gamma\delta\end{aligned}$$

Τι σας θυμίζουν αυτές όταν $\alpha = \beta = \gamma = \delta$;

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι μικρότερος του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι :

$$(\alpha > 0 \quad \text{και} \quad \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

$$(\alpha < 0 \quad \text{και} \quad \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$\alpha,\beta \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

$$\alpha,\beta \text{ ετερόσημοι } \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

Άν α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

1. Μπορούμε να προσθέσουμε δύο ανισώσεις κατά μέλη

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

2. Αν επιπλέον α,β,γ,δ είναι θετικοί αριθμοί, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο ανισώσεις κατά μέλη

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$$

3. Μπορούμε στα μέλη μιας ανισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

4. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με ένα θετικό

$$\text{Αν } \gamma > 0 \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

5. Άν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με ένα αρνητικό τότε αλλάζει φορά

$$\text{Αν } \gamma > 0 \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

6. Αν α,β είναι θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών
Σωστό ή Λάθος

1 Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha - \beta < 0$ . . . . . **Σ Λ**

2 Αν $x > y$, τότε $y - x > 0$. . . . . **Σ Λ**

3 Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + 3 > \beta + 3$ . . . . . **Σ Λ**

4 Αν $x < y$, τότε $x - 3 > y - 3$ . . . . . **Σ Λ**

5 Αν $\alpha > \beta$, τότε $-2\alpha > -2\beta$ . . . . . **Σ Λ**

6 Αν $x > y$, τότε $\frac{x}{-2} > \frac{y}{-2}$ . . . . . **Σ Λ**

7 Αν $\alpha < 1$, τότε $\alpha^2 < \alpha$ . . . . . **Σ Λ**

8 Αν $x^2 > 2x$, τότε $x > 2$ . . . . . **Σ Λ**

9 Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ . . . . . **Σ Λ**

10 Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)\beta > 0$ . . . . . **Σ Λ**

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 2.2.1 Αν $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$$

Λύση 2.2.1 Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε :

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\frac{1}{\alpha}\alpha + \frac{1}{\alpha^2} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Άσκηση 2.2.2 Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ να αποδειχθεί ότι ισχύει :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$$

Λύση 2.2.2 Είναι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Άσκηση 2.2.3 Να αποδειχθεί ότι για τους θετικούς αριθμούς x και y ισχύει :

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$$

Λύση 2.2.3 Είναι

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (x+y)\frac{x+y}{xy} \geq 4$$
$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$$
$$(x-y)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Άσκηση 2.2.4 Αν $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ να αποδειχθεί ότι :

$$\text{i) } (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \quad \text{ii) } (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$$

Λύση 2.2.4 Είναι για την i)

$$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Για την ii) χρησιμοποιώντας την i) έχουμε

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \\ (\beta+\gamma)^2 \geq 4\beta\gamma \\ (\gamma+\alpha)^2 \geq 4\gamma\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2 \geq 64\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

και επειδή οι βάσεις είναι Θετικές προκύπτει ότι

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$$

Άσκηση 2.2.5 Αν $\alpha+\beta \geq 0$ να αποδειχθεί ότι :

$$\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha^2\beta+\alpha\beta^2$$

Λύση 2.2.5 Με ευθεία απόδειξη, έχουμε :

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\alpha^3-\alpha^2\beta)+(\beta^3-\alpha\beta^2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-\beta)-\beta^2(\alpha-\beta) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta) \geq 0 \quad \text{που ισχύει}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.2.6 Αν $\alpha+\beta=2$, να αποδειχθεί ότι :

i) $\alpha\beta \leq 1$ ii) $\alpha^2+\beta^2 \geq 2$

Λύση 2.2.6 Επειδή $\alpha+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2-\alpha$, έχουμε για την i :

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha(2-\alpha) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow 2\alpha-\alpha^2 \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0 \quad \text{που αληθεύει}
\end{aligned}$$

Παρόμοια για την ii) έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2 \geq 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha^2+(2-\alpha)^2 \geq 2 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2+4-4\alpha+\alpha^2 \geq 2 \\
&\Leftrightarrow 2\alpha^2-4\alpha+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0 \quad \text{που αληθεύει}
\end{aligned}$$

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 2.2.7 Αν ισχύει $\alpha > -3$, να αποδείξετε ότι:

1) $6 + 2\alpha > 3 + \alpha$ 2) $\alpha - 4 < 3\alpha + 2$

Άσκηση 2.2.8 Αν ισχύει $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι:

1) $\alpha + 3 > 5$ 2) $2\alpha + 4 > 8$

3) $-3\alpha + 6 < 0$ 4) $\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$

Άσκηση 2.2.9 Αν ισχύει $\alpha < 4$, να αποδείξετε ότι:

1) $2 - \frac{8 - 3\alpha}{2} < \alpha$ 2) $\frac{\alpha - 3}{2} - \frac{2\alpha - 9}{6} > \frac{\alpha - 2}{3}$

Άσκηση 2.2.10 Αν ισχύει $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

1) $5 - 4\alpha > 5 - 4\beta$ 2) $\frac{\alpha}{3} - 7 < \frac{\beta}{3} - 7$

3) $9 - \frac{\alpha}{2} > 9 - \frac{\beta}{2}$ 4) $2 - \alpha > 2 - \beta$

Άσκηση 2.2.11 Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$$

Άσκηση 2.2.12 Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$2(\alpha + \beta) > 4 + \alpha\beta$$

Άσκηση 2.2.13 Αν $\alpha \leq -1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + 1 \leq \alpha^2 + \alpha$$

Άσκηση 2.2.14 Να αποδείξετε ότι:

1) $3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$
2) $2(\alpha^2 + \beta^2) - (b^2 - a^2) \geq 2\beta(3\alpha - \beta)$

Άσκηση 2.2.15 Αν ισχύει $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

1) $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$
2) $\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta$
3) $\alpha < \frac{3\alpha + \beta}{4} < \beta$
4) $\alpha < \frac{2\alpha + 5\beta}{7} < \beta$

Άσκηση 2.2.16 Αν ισχύει $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha < \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} < \beta$$

Άσκηση 2.2.17 Αν ισχύει $6 < \alpha < 9$, να βρείτε μετα- ξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

1) $2\alpha - 5$ 2) $-3\alpha + 1$ 3) $1 - \frac{\alpha}{5}$ 4) $2\alpha - \frac{3}{2}$

Άσκηση 2.2.18 Αν ισχύουν οι $-12 < \alpha < -6$ και $2 < \beta < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

1) $-\alpha - 5\beta$ 2) $\alpha\beta$ 3) $\frac{\alpha}{\beta}$ 4) $\alpha - \beta^2$

Άσκηση 2.2.19 Αν ισχύουν οι $-6 < \alpha < -4$ και $-3 < \beta < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

1) $2\alpha + 3\beta$ 2) $\alpha - 2\beta$ 3) $\frac{\alpha}{2} - \beta + 2$ 4) $\alpha\beta$

Άσκηση 2.2.20 Αν $x > 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$α = x^3 \quad \text{και} \quad x^2 - x + 1$$

Άσκηση 2.2.21 Αν οι αριθμοί x και y είναι ομόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$α = 1 + x + y \quad \text{και} \quad (1 + x)(1 + y)$$

Άσκηση 2.2.22 Αν $x > 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$α = \frac{x+1}{x} \quad \text{και} \quad \frac{x}{x-1}$$

Άσκηση 2.2.23 Αν $α + β = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$1)\ αβ \leq 1 \qquad 2)\ α^2 + β^2 \geq 2$$

Άσκηση 2.2.24 Να αποδείξετε ότι για θετικούς α,β,γ ισχύουν

i) $(α^2 + 1)(β^2 + 1)(γ^2 + 1) \geq 8αβγ$

ii) $\dfrac{1}{α} + \dfrac{1}{β} + \dfrac{1}{γ} \geq \dfrac{1}{\sqrt{αβ}} + \dfrac{1}{\sqrt{βγ}} + \dfrac{1}{\sqrt{αγ}}$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $α + β \geq 2\sqrt{αβ}$

Άσκηση 2.2.25 Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό α ισχύει

$$\left|\frac{6α}{9α^2 + 1}\right| \leq 1$$

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

Αν x είναι πραγματικός αριθμός, η απόλυτη τιμή του συμβολίζεται με $|x|$ και ορίζεται ως εξής :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Λεκτικά, απόλυτη τιμή ενός θετικού πραγματικού είναι ο ίδιος ο αριθμός, ενώ ενός αρνητικού πραγματικού αριθμού ο αντίθετος του. Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες σχέσεις :

$$x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$$

$$|x| \geq x \quad \text{και} \quad |x| \geq -x$$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$|-x| = |x| \geq 0$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|xy| = |x||y| \quad \text{και} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Σχόλια Η ισότητα $|xy| = |x||y|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες, ενώ η ανισότητα $|x+y| \leq |x| + |y|$ και για περισσότερους προσθετέους. Ισχύουν δηλαδή γενικά

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu|$$

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu|$$

Για την γεωμετρική εποπτεία, αν α και β είναι σημεία πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε

$$|\alpha - \beta| = d(\alpha,\beta)$$

συμβολίζει την απόσταση των α και β ή αλλιώς το μέτρο του ευθυγράμμου τμήματος αβ ή αλλιώς το μήκος του διαστήματος [α,β].

Παρόμοια, αν α σημείο του πραγματικού άξονα και r πραγματικός αριθμός, τότε η ανισότητα

$$|x - \alpha| \leq r$$

ερμηνεύεται σαν το διάστημα $[\alpha - r, \alpha + r]$.

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών
Σωστό ή Λάθος

1 Ισχύει ότι $|-\alpha| = |\alpha|$. . . . . Σ Λ

2 Ισχύει ότι $|\alpha - 2| = |2 - \alpha|$. . . . . Σ Λ

3 Ισχύει ότι $|\alpha| > |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$. . . . . Σ Λ

4 Αν α,β ετερόσημοι τότε $|\alpha^{2009}\beta^{2011}| = \alpha^{2009}\beta^{2011}$. . . . . Σ Λ

5 Αν α,β ομόσημοι τότε $|-\frac{\alpha}{\beta}| = -\frac{\alpha}{\beta}$. . . . . Σ Λ

6 Αν $|\alpha| \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$. . . . . Σ Λ

7 Αν $|x| \leq 2$ τότε x ανήκει στο διάστημα [-2,2]. . . . . Σ Λ

8 Η ισότητα $|x + y| = |x| + |y|$ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί. . . . . Σ Λ

9 Η απόσταση δύο αριθμών είναι η διαφορά τους. . . . . Σ Λ

10 Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ τότε $|\beta - \gamma| < |\alpha - \delta|$. . . . . Σ Λ

11 Αν $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$. . . . . Σ Λ

12 Αν $x \in (-\infty, -5)$ ή $x \in (5, +\infty)$ τότε $|x| > 5$. . . . . Σ Λ

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 2.3.1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |\sqrt{3} - 3| - |\pi - 3|$$

Λύση 2.3.1 Είναι

- $\sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 3 < 0 \Leftrightarrow |\sqrt{3} - 3| = 3\sqrt{3}$
- $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi - 3 > 0 \Leftrightarrow |\pi - 3| = \pi - 3$

Οπότε

$$A = |\sqrt{3} - 3| - |\pi - 3| = 3 - \sqrt{3} + \pi - 3 = \pi - \sqrt{3}$$

Άσκηση 2.3.2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |4x^2 - 4x + 1| \quad \text{και} \quad B = |x^6 - 6x^3 + 13|$$

Λύση 2.3.2 Είναι

- $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$ οπότε
  $A = |4x^2 - 4x + 1| = 4x^2 - 4x + 1$

- $x^6 - 6x^3 + 13 = (x^6 - 6x^3 + 9) + 4 = (x^3 - 3)^2 + 4 \geq 0$ οπότε
  $B = |x^6 - 6x^3 + 13| = x^6 - 6x^3 + 13$

Άσκηση 2.3.3 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |-x^4 - x^2 - 3| \quad \text{και} \quad B = |-x^2 + 2x - 5|$$

Λύση 2.3.3 Είναι

- $-x^4 - x^2 - 3 = -(x^4 + x^2 + 3) < 0$ οπότε
  $A = |-x^4 - x^2 - 3| = x^4 + x^2 + 3$

- $-x^2 + 2x - 5 = -(x^2 - 2x + 1 + 4) = -((x - 1)^2 + 4) < 0$ οπότε
  $B = |-x^2 + 2x - 5| = x^2 - 2x + 5$

Άσκηση 2.3.4 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |4 - |-x^2 + 2x - 1|| - ||x^2 + 4| + 4x| \quad \text{και} \quad B = |2^{x+3} - 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x|$$

Λύση 2.3.4 Είναι για την Α

- $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 < 0$ οπότε
  $|4 - |-x^2 + 2x - 1|| = |4 + (x - 1)^2| = 4 + (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 5$
- $||x^2 + 4| + 4x| = |x^2 + 4 + 4x| = |(x + 2)^2| = (x + 2)^2$ ώστε

$$A = x^2 - 2x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = -6x + 1$$

Για την Β έχουμε :

- $2^{x+3} - 2^x = 2^x(2^3 - 1) = 7 \cdot 2^x > 0$
- Επειδή $|x| \geq -x$ προκύπτειότι $|x| + x \geq 0$
- Επειδή $|x| \geq x$ προκύπτειότι $|x| - x \geq 0$ οπότε

$$B = 7 \cdot 2^x + (|x| + x) - (|x| - x) = 7 \cdot 2^x + 2x$$

Άσκηση 2.3.5 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = |x-1| + |x-3| \quad \text{όπου} \quad 1 < x < 3 \quad \text{και}$

$B = |\alpha-\beta| + |2\gamma-2\beta| - |\beta+\gamma-2\alpha| + \left|\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| \quad \text{όπου} \quad \alpha < \beta < \gamma$

Λύση 2.3.5 Είναι για την Α

- $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ και
- $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow |x-3| = 3-x$ οπότε

$$A = (x-1) + (3-x) = 2$$

Για την Β έχουμε :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta < 0 \Leftrightarrow |\alpha-\beta| = -\alpha+\beta$
- $\gamma > \beta \Leftrightarrow \gamma-\beta > 0 \Leftrightarrow 2\gamma-2\beta > 0 \Leftrightarrow |2\gamma-2\beta| = 2\gamma-2\beta$
- $\begin{cases} \beta > \alpha \\ \gamma > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \beta+\gamma > 2\alpha \Leftrightarrow \beta+\gamma-2\alpha > 0 \Leftrightarrow |\beta+\gamma-2\alpha| = \beta+\gamma-2\alpha$
- $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} < 0 \Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha$

$$B = (-\alpha+\beta) + (2\gamma-2\beta) - (\beta+\gamma-2\alpha) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)$$
$$= -\alpha+\beta+2\gamma-2\beta-\beta-\gamma+2\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{3\beta}{2} + \gamma$$

Άσκηση 2.3.6 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = 2 + x - |x-1| \quad \text{όπου} \quad x \in R \quad \text{και}$

$B = 2x - |x-2| + |x+1| \quad \text{όπου} \quad x \in R$

Λύση 2.3.6 Για την Α, εξετάζουμε που μηδενίζεται το απόλυτο και διακρίνουμε περιπτώσεις. Έτσι έχουμε :

- $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ και
- $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = 1-x$ οπότε

$$A = \begin{cases} 2+x-(x-1) & x \geq 1 \\ 2+x-(1-x) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$$

Παρόμοια για την Β, βρίσκουμε που μηδενίζονται τα απόλυτα και φτιάχνουμε ένα πίνακα προσήμων :

x		-1		2	
x+1	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+

Έτσι έχουμε :

$$B = \begin{cases} 2x-(2-x)+(-x-1) & x<-1 \\ 2x-(2-x)+(x+1) & -1\le x<2 \\ 2x-(x-2)+(x+1) & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3 & x<-1 \\ 4x-1 & -1\le x<2 \\ 2x+3 & x\ge 2 \end{cases}$$

Άσκηση 2.3.7 Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \left|\frac{x^4-8x}{x-2}\right| + \left|\frac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right| \quad \text{όπου} \quad x>0 \quad \text{και} \quad x\neq 2$$

Λύση 2.3.7 Εξετάζουμε κάθε όρο ξεχωριστά, έχουμε :

- $\left|\dfrac{x^4-8x}{x-2}\right| = \left|\dfrac{x(x^3-8)}{x-2}\right| = \left|\dfrac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\right|$

$= |x|\cdot|x^2+2x+4| = x(x^2+2x+4)$

- $\left|\dfrac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right| = \left|\dfrac{x^5(x^2+1)}{x^3(x^2+1)}\right| = |x^2| = x^2$

οπότε

$A = x(x^2+2x+4)+x^2 = x^3+3x^2+4x \quad \text{όπου} \quad x>0 \quad \text{και} \quad x\neq 2$

Άσκηση 2.3.8 Να αποδείξετε ότι :

$$|\alpha-\beta| \le |\alpha-5| + |\beta-5|$$

Λύση 2.3.8 Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|x-y|\le|x|+|y|$:

$$|\alpha-\beta| = |(\alpha-5)-(\beta-5)| \le |\alpha-5|+|\beta-5|$$

Άσκηση 2.3.9 Να αποδείξετε ότι :

$$|\alpha-3\beta|^2 + |3\alpha+\beta|^2 = 10(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

Λύση 2.3.9 Είναι :

$$|\alpha-3\beta|^2+|3\alpha+\beta|^2 = (\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+\beta)^2 = \alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2+9\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2$$
$$= 10\alpha^2+10\beta^2 = 10|\alpha|^2+10|\beta|^2 = 10(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

Άσκηση 2.3.10 Αν $\beta\neq 0$ και $|\alpha+|\beta|| = |\alpha|+|\beta|$ να αποδείξετε ότι $\alpha\ge 0$.

Λύση 2.3.10 Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε :

$$\alpha^2 + 2\alpha|\beta| + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha|\beta| = 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow \alpha = |\alpha| \Leftrightarrow \alpha \geq 0$$

Άσκηση 2.3.11 Αν $\alpha \neq 0$ να αποδείξετε ότι

$$\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$$

Λύση 2.3.11 Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε :

$$\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right|^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 4$$
$$\alpha^2 + 2\frac{1}{\alpha}\alpha + \frac{1}{\alpha^2} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Άσκηση 2.3.12 Αν $d(\alpha,2\beta) > d(2\alpha,\beta)$ να δείξετε ότι $|\alpha| < |\beta|$.

Λύση 2.3.12 Είναι

$$d(\alpha,2\beta) > d(2\alpha,\beta) \Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| > |2\alpha - \beta| \Leftrightarrow$$
$$|\alpha - 2\beta|^2 > |2\alpha - \beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha - 2\beta)^2 > (2\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 > 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 3\beta^2 > 3\alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$|\beta|^2 > |\alpha|^2 \Leftrightarrow |\beta| > |\alpha|$$

Άσκηση 2.3.13 Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha\beta| - \alpha\beta \geq \alpha|\beta| - |\alpha|\beta$$

Λύση 2.3.13 Με ευθεία απόδειξη :

$$|\alpha\beta| - \alpha\beta \geq \alpha|\beta| - |\alpha|\beta \Leftrightarrow |\alpha|\cdot|\beta| - \alpha\beta - \alpha|\beta| + |\alpha|\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$|\beta|(|\alpha| - \alpha) + \beta(|\alpha| - \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - \alpha)(|\beta| + \beta) \geq 0 \quad \text{που ισχύει διότι}$$
$$\begin{cases} |\alpha| \geq \alpha \Leftrightarrow |\alpha| - \alpha \geq 0 \\ |\beta| \geq -\beta \Leftrightarrow |\beta| + \beta \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 2.3.14 Να βρείτε τις τιμές των απολύτων

α) $|-2|$ β) $|-3|+|-1|$ γ) $|\sqrt{2}-1|$ δ) $|\sqrt{2}-2|$
ε) $|\pi-3|$ στ) $|\pi-3|\,|\pi-4|$ ζ) $|2\sqrt{3}-4|$ η) $\left|\dfrac{\pi}{2}-2\right|$
θ) $|(-1)^{1001}|$ ι) $|2-|1-\sqrt{2}||$ κ) $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right|$

Άσκηση 2.3.15 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

1) $|x^2+1|$ 2) $|-x^2+4x-4|$

3) $||x^2+1|+12|$ 4) $|x^2-6x+9|$

5) $|-x^2-3|$ 6) $||1-2|-3|$

Άσκηση 2.3.16 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $|9x^2-6x+1|$ 2) $|x^6+6x^3+17|$

3) $|-x^4-x^2-5|$ 4) $|-x^2+2x-7|$

Άσκηση 2.3.17 Αν $x<2$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $x+|x-2|$ 2) $3x-|x-2|+|3-x|$

3) $|x-2|+|2x-4|-|x-3|$ 4) $|4-2x|\,|6-3x|$

Άσκηση 2.3.18 Αν $0\le x\le 1$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $-2x+|x-1|$

2) $x-|x-1|+|1-x|$

3) $|x-1|+|2-2x|-|x^2-1|+|2x-6|$

4) $|x^2-x|+|2x^2-5|-|x^3-4|$

Άσκηση 2.3.19 Αν $x>5$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $2x+|x-5|$

2) $x-|x-5|+|5-x|$

3) $|x-5|+|x-4|-|x-3|+|2x-4|$

4) $|x^2-25|+|x^2-5x|-|2x-3|$

Άσκηση 2.3.20 Αν $\alpha<2<\beta$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\alpha+|\alpha-1|+|\beta-2|$

2) $|2-\alpha|+|2-\beta|-|\alpha-3|$

3) $|\beta-1|+|\beta|-|\beta^2-4|+|\alpha+2-2\beta|$

4) $\left|\alpha-\dfrac{\beta+2}{2}\right|+\left|\beta-\dfrac{\alpha+2}{2}\right|-|2\beta-4|$

Άσκηση 2.3.21 Να απλοποιηθούν, από τα απόλυτα, οι παραστάσεις :

1) $|x^2-6x+9|$

2) $|-x^2+8x-16|$

3) $|(x-2)(x+2)+6|$

4) $\dfrac{|x|^3+2x^2}{|x|+2}$

5) $\dfrac{|x|^3+5x^2}{2|x|+10}$

6) $|x^2-4x+4|$

Άσκηση 2.3.22 Αν $-2<x<3$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A=|x+2|+|9-3x| \quad B=\big|\,|x+2|-5-|2x-6|\,\big|$$

Άσκηση 2.3.23 Να απλοποιηθούν, από τα απόλυτα, οι παραστάσεις :

1) $\dfrac{x^2+3|x|}{|x|+3}$

2) $\dfrac{x^2-6|x|+5}{|x|-1}$

3) $\dfrac{x^2+6|x|+9}{|x|+3}$

4) $\dfrac{x^2-4}{|x|+2}$

5) $|x^2 - 2x + 1| - |x^2 - x + |x||$ 6) $|x^2 + 4x + 4| - |x^2 + x + |x||$

Άσκηση 2.3.24 Αφού εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις με απόλυτα, στη συνέχεια να τα απαλείψετε :

$$A = x - 1 + d(x,2) \quad B = x + d(x, -2) + d(x - 1, 2)$$

Άσκηση 2.3.25 Αν ισχύει ότι

$$\left|\frac{\alpha + 4}{\alpha + 2}\right| = 2$$

να δείξετε ότι $|\alpha| = 2$.

Άσκηση 2.3.26 Αν ισχύει ότι

$$\left|\frac{2\alpha + 3\beta}{3\alpha + 2\beta}\right| < 1$$

να δείξετε ότι $|\alpha| > |\beta|$.

Άσκηση 2.3.27 Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 3$ να αποδείξετε ότι

α) $|4x - 5y| \leq 19$ και β) $|3x - 2y + 7| < 2000$

Άσκηση 2.3.28 Αν ισχύει ότι $|x| < 1$ και $|y| < 1$ να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{x + y}{1 + xy}\right| < 1$$

Άσκηση 2.3.29 Να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{x}{1 + |x|}\right| + \frac{1}{1 + |x|} = 2$$

Άσκηση 2.3.30 Δειξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει :

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}$$

Άσκηση 2.3.31 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{|\alpha - 1|}{|1 - \alpha|} - \frac{|-\beta - 1|}{|\beta + 1|} + \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha}$$

Άσκηση 2.3.32 Αν $-1 < \alpha < 1$ να αποδείξετε ότι :

$$\big|2 - |\alpha - 1|\big| = \alpha + 1$$

Άσκηση 2.3.33 Να αποδείξετε ότι :

$$\left|\frac{x}{1 + x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2.3.34 Αν $|\alpha| > |\beta|$ να αποδείξετε ότι :

$$\frac{|\alpha|}{|\alpha| - |\beta|} - \frac{|\beta|}{|\alpha| - |\beta|} = 1$$

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Δηλαδή, αν $\alpha > 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας Για τις τετραγωνικές ρίζες ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες :

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Δηλαδή, αν $\alpha > 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Ιδιότητες ν-οστής ρίζας Για τις ν-οστές ρίζες ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες :

Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha} = \alpha$

Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε : $\sqrt[\nu]{\alpha} = |\alpha|$

Αν $\alpha,\beta \geq 0$, τότε :

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$$

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη Ο ορισμός των δυνάμεων με ρητό εκθέτη γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ,ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε

$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών
Σωστό ή Λάθος

1 Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. **Σ Λ**

2 $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in R$. . . . . **Σ Λ**

3 $\alpha + \beta = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ . . . . **Σ Λ**

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 2.4.1 Να βρεθούν οι ρίζες :

$$\alpha)\ \sqrt[3]{216},\quad \beta)\ \sqrt[4]{625},\quad \gamma)\ \sqrt[3]{\frac{125}{512}},\quad \delta)\ \sqrt{0{,}0009},\quad \varepsilon)\ \sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}},$$

Λύση 2.4.1 Είναι :

$$\alpha)\ \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \beta)\ \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5 \quad \gamma)\ \sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{5}{8}$$

$$\delta)\ \sqrt{0{,}0009}\sqrt{\left(\frac{3}{100}\right)^2} = \frac{3}{100} = 0{,}03 \quad \varepsilon)\ \sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}} = \frac{4x^2y^3}{5}$$

Άσκηση 2.4.2 Να βρεθούν για $x \in R$ οι τιμές των :

$$\alpha)\ A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad \beta)\ B = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$$

Λύση 2.4.2 Είναι :

$$A = \frac{|x|}{x} \quad \text{οπότε} \quad A = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Για την β) εξετάζω την τιμή της $B = |x-1| + |x-3|$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα που ορίζονται από τα σημεία 1,3.

$$\begin{array}{llll} x \le 1 & \text{τότε} \quad x-1 \le 0 \text{ και } x-3<0 & \text{οπότε } |x-1| = 1-x \text{ και } |x-3| = 3-x \\ 1<x\le 3 & \text{τότε} \quad x-1>0 \text{ και } x-3\le 0 & \text{οπότε } |x-1| = x-1 \text{ και } |x-3| = 3-x \\ 3<x & \text{τότε} \quad x-1>0 \text{ και } x-3>0 & \text{οπότε } |x-1| = x-1 \text{ και } |x-3| = x-3 \end{array}$$

Άρα $B = \begin{cases} (1-x)+(3-x) = 4-2x & \text{για } x \le 1 \\ (x-1)+(3-x) = 2 & \text{για } 1<x\le 3 \\ (x-1)+(x-3) = 2x-4 & \text{για } 3<x \end{cases}$

Άσκηση 2.4.3 Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

α) $\sqrt{36x^4+12x^2+1}$ β) $\sqrt{\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{5}+\dfrac{9}{25}}$ γ) $\sqrt{\dfrac{x^4}{25y^2}+1+\dfrac{25y^2}{4x^4}}$

Λύση 2.4.3 Είναι :

α) $\sqrt{36x^4+12x^2+1} = \sqrt{(6x^2+1)^2} = 6x^2+1$

β) $\sqrt{\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{5}+\dfrac{9}{25}} = \sqrt{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{5}$

γ) $\sqrt{\dfrac{x^4}{25y^2}+1+\dfrac{25y^2}{4x^4}} = \sqrt{\left(\dfrac{x^2}{5y}+\dfrac{5y}{2x^2}\right)^2} = \left|\dfrac{x^2}{5y}+\dfrac{5y}{2x^2}\right|$

Άσκηση 2.4.4 Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$ β) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

γ) $4-\sqrt{x-2} = 0$ δ) $\sqrt{-3x+5} = \sqrt{x-7}$

Λύση 2.4.4

α) Θα πρέπει $x+3 \ge 0$ και $2x-1 \ge 0$ δηλαδή $x \ge 0$, τότε

$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x+3 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 4$ λύση παραδεκτή

β) Θα πρέπει $x-2 \ge 0$ και $2x+3 \ge 0$ δηλαδή $x \ge 2$, τότε

$\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x-2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -5$ λύση μη αποδεκτή

γ) Θα πρέπει $x-2 \ge 0$ δηλαδή $x \ge 2$, τότε

$4-\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow 16 = x-2 \Leftrightarrow x = 18$ λύση παραδεκτή

δ) Θα πρέπει $-3x+5 \ge 0$ και $x-7 \ge 0$ δηλαδή $x \le \frac{5}{3}$ και $x \ge 7$. Αδύνατον.

Άσκηση 2.4.5 Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

$$\text{α) } \sqrt{\sqrt[4]{16}} \quad \text{β) } \sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3} \quad \text{γ) } \sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$$

Λύση 2.4.5 Έχουμε :

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}} = \sqrt{\sqrt[4]{2^4}} == \sqrt{2}$

β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4} = \sqrt{\sqrt{5}-2}$

Άσκηση 2.4.6 Να βρεθούν τα εξαγόμενα :

$$\text{α) } \sqrt{19600} \quad \text{β) } \sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343} \quad \text{γ) } \sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125}$$

Λύση 2.4.6 Θα είναι :

α) $\sqrt{19600} = \sqrt{4 \cdot 49 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} \cdot = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 140$

β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{5^5} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Άσκηση 2.4.7 Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

$$\text{α) } \sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8} \quad \text{β) } \sqrt{108x^5y^6} \quad \text{γ) } \sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} \quad \text{δ) } \sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}}$$

Λύση 2.4.7 Έχουμε :

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(2\alpha\beta^2)^4} = 2|\alpha|\beta^2$

β) $\sqrt{108x^5y^6} = \sqrt{2^2 3^3 x^5 y^6} = 2 \cdot 3x^2|y^3|\sqrt{3x} = 6x^2|y|^3\sqrt{3x}$

γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{3^5\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{26}}}} = \sqrt[40]{3^{26}} = \sqrt[20]{3^{13}}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\alpha^4\beta^2}}} = \sqrt[24]{\alpha^4\beta^2} = \sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

Άσκηση 2.4.8 Να βρεθούν τα γινόμενα :

$$\text{α) } \sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4} \quad \text{β) } \sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2} \quad \text{γ) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$$

Λύση 2.4.8 Είναι :

α) $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^6} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^{10}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$

β) $\sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2} = \sqrt[60]{\alpha^{35}\alpha^9\alpha^8} = \sqrt[60]{\alpha^{52}} = \sqrt[15]{\alpha^{13}}$

γ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{6}} = \sqrt[30]{2^{15}3^{10}\dfrac{1}{6^6}} = \sqrt[30]{\dfrac{2^{15}3^{10}}{2^6 3^6}} = \sqrt[30]{2^9 3^4}$

Άσκηση 2.4.9 Να βρεθούν τα πηλίκα :

α) $\dfrac{\sqrt[12]{\alpha^5}}{\sqrt[4]{\alpha}}$ β) $\dfrac{\sqrt[9]{\alpha^8}}{\sqrt[6]{\alpha^5}}$ γ) $\dfrac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$

Λύση 2.4.9 Θα είναι :

α) $\dfrac{\sqrt[12]{\alpha^5}}{\sqrt[4]{\alpha}} = \dfrac{\sqrt[12]{\alpha^5}}{\sqrt[12]{\alpha^3}} = \sqrt[12]{\alpha^{5-3}} = \sqrt[6]{\alpha}$

β) $\dfrac{\sqrt[9]{\alpha^8}}{\sqrt[6]{\alpha^5}} = \sqrt[18]{\dfrac{\alpha^{16}}{\alpha^{15}}} = \sqrt[18]{\alpha}$

γ) $\dfrac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}} \sqrt[30]{\dfrac{3^{20}}{3^9}} = \sqrt[30]{3^{11}}$

Άσκηση 2.4.10 Να βρεθούν τα αθροίσματα :

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ β) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54}$

γ) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50}$ δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500}$

Λύση 2.4.10 Είναι :

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2^2 2} + \sqrt{2^4 2} - \sqrt{3^2 2} = 2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

β) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54} = -\sqrt[3]{2^3 2} + \sqrt[3]{5^3 5} - \sqrt[3]{3^3 2} = -2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{5}$

γ) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} = 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500} = 8\sqrt{2^2 5} + 3\sqrt{2^4 5} - 2\sqrt{10^2 5} = (16 + 12 - 20)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

Άσκηση 2.4.11 Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

α) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ β) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ γ) $\sqrt{54 + 14\sqrt{5}}$

Λύση 2.4.11 Είναι :

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5+4-2\cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$

γ) $\sqrt{54+14\sqrt{5}} = \sqrt{49+5+2\cdot 7\sqrt{5}} = \sqrt{(7+\sqrt{5})^2} = |7+\sqrt{5}| = 7+\sqrt{5}$

Άσκηση 2.4.12 Να μετασχηματιστούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ β) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ γ) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Λύση 2.4.12 Έχουμε :

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

β) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = 2-\sqrt{3}$

γ) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{x^2+x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1} =$

$= -2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$

δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 2.4.13 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})$ και $(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

β) $\sqrt[3]{6}$ και $\sqrt{3}$

Άσκηση 2.4.14 Να μετατραπούν οι παρακάτω παραστάσεις σε άλλες με ρητό παρονομαστή

$$\frac{5}{\sqrt{10}}, \quad \frac{3}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x}}, \quad \frac{2x^2+3}{\sqrt{4x^2+6}},$$

Άσκηση 2.4.15 Να μετατραπούν οι παρακάτω παραστάσεις σε άλλες με ρητό παρονομαστή

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2}, \quad \frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}, \quad \frac{3x}{2-\sqrt{x^2+4}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

Άσκηση 2.4.16 Να απλοποιηθούν τα αθροίσματα :

α) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ β) $(2-\sqrt{3})^{-3} + (2+\sqrt{3})^{-3}$

Άσκηση 2.4.17 Να βρεθεί η διαφορά :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

Άσκηση 2.4.18 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$A = \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-2x+1}$ αν $1 < x < 3$

$B = \sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{1+2x+x^2}$ αν $-1 < x < \dfrac{3}{2}$

Άσκηση 2.4.19 Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις, ενοποιώντας σε μια ρίζα κάθε παράσταση:

$$A = \sqrt[5]{\alpha^2}\sqrt[4]{\alpha^3}\sqrt{\alpha} \quad \text{όπου } \alpha > 0$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{\alpha^3}\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[6]{\alpha^5}} \quad \text{όπου } \alpha > 0$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha}}\sqrt[4]{\beta^3\sqrt[3]{\beta}}}{\sqrt[4]{\alpha^3}\sqrt[5]{\beta^4}} \quad \text{όπου } \alpha > 0, \beta > 0$$

Άσκηση 2.4.20 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$$

$$B = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Άσκηση 2.4.21 Να γράψετε σαν μια ρίζα τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = \sqrt{3\sqrt[4]{3^3\sqrt[3]{3}}}$$

$$B = \sqrt[5]{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}}}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{16\sqrt[4]{32\sqrt[3]{2}}}$$

Άσκηση 2.4.22 Να αποδείξετε ότι :

α) $$\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{2}}{13(\sqrt{3} - 2)} = \frac{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{13}$$

β) $$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}} = \frac{26 + \sqrt{6} + 12\sqrt{10}}{30}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Η γενική μορφή μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης είναι η ακόλουθη

$$\alpha \cdot x + \beta = 0$$

Επιλύοντας ως προς x έχουμε

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot x + \beta = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha \cdot x = -\beta \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

2. Αν $\alpha = 0$ τότε εξετάζουμε το β
   i. Αν $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση ισοδυναμεί με $0 \cdot x = -\beta$ και είναι αδύνατη.
   ii. Αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση ισοδυναμεί με $0 \cdot x = 0$ και είναι ταυτότητα.

Σχόλιο Η αναλυτική διερεύνηση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης μέσω των συντελεστών α και β είναι η βάση για την διερεύνηση πολυπλοκότερων εξισώσεων όπου οι συντελεστές είναι με τη σειρά τους συναρτήσεις κάποιας άλλης παραμέτρου. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο πρόβλημα :

Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Υπάρχουν πολλά προβλήματα εξισώσεων ανωτέρου του 1^{ου} βαθμού που τελικά ανάγονται στη λύση πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Αυτή η αναγωγή γίνεται συνήθως με παραγοντοποίηση, μια ταξινόμησή τους όμως θα ήταν μάταιη.

Ένας άλλος βαθμός πολυπλοκότητας επεισέρχεται όταν στην εξίσωση εμφανίζονται απόλυτες τιμές. Ο γενικός κανόνας είναι "Προσπαθούμε να απαλλαγούμε από αυτές." Δίνουμε δύο ενδεικτικά παραδείγματα :

1. Επίλυση της $|f(x)| = |g(x)|$. Η επίλυσή της συνίσταται στην ένωση των λύσεων των ακόλουθων εξισώσεων
$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$
2. Επίλυση της $|f(x)| = g(x)$. Η επίλυσή της συνίσταται στην ένωση των λύσεων των ακόλουθων εξισώσεων
$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \quad \text{και} \quad g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \quad \text{και} \quad g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Σχόλιο Μια γενική μεθοδολογία που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε για την απαλειφή απολύτων από μια εξίσωση είναι η ακόλουθη :

1. Για κάθε μία υποέκφραση με απόλυτα που εμφανίζεται στην εξίσωση βρίσκουμε τις ρίζες της.
2. Για όλα τα διαδοχικά διαστήματα που προσδιορίζονται εκ των ριζών όλων των υποεκφράσεων βρίσκουμε το πρόσημο της υποέκφρασης και απαλείφουμε κατόπιν το απόλυτο από αυτή.
3. Η αρχική εξίσωση με απόλυτα, μετασχηματίζεται με αυτο τον τρόπο σε ένα πλήθος περιπτώσεων εξισώσεων χωρίς απόλυτα. Επιλύουμε τότε κάθε μία ξεχωριστά λαμβάνοντας υπόψη το διάστημα στο οποίο βρισκόμαστε.

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού
Σωστό ή Λάθος

1	$xy = x^2 \Leftrightarrow x = y$ για κάθε $x,y \in R$	**Σ**	**Λ**
2	Το 3 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{x-1}{1} + 1 = 2$	**Σ**	**Λ**
3	Αν το 3 και το 2 είναι λύσεις της εξίσωσης $αx = x + β - 2$, τότε $α = 3$ ή $β = 2$.	**Σ**	**Λ**
4	Αν η εξίσωση $α^2x = x + α - 1$ είναι αδύνατη τότε το $α = -1$	**Σ**	**Λ**
5	Αν η εξίσωση $α^2x = 4x + α - 2$ είναι αόριστη τότε $α = 2$	**Σ**	**Λ**

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 3.1.1 Να επιλυθεί η εξίσωση :

$$(2x+5)^2-(3x-4)^2=0$$

Λύση 3.1.1 Επίλυση :

$$\begin{aligned}(2x+5)^2-(3x-4)^2=0 &\Leftrightarrow (2x+5+3x-4)(2x+5-3x+4)=0\\ &\Leftrightarrow (5x+1)(-x+9)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}5x+1=0\\ -x+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{5}\\ x=9\end{cases}\end{aligned}$$

Άσκηση 3.1.2 Να επιλυθούν οι εξισώσεις :

α) $\dfrac{x-1}{3x-6}=\dfrac{x-2}{3x+1}$

β) $\dfrac{7-5x}{1+x}=\dfrac{2-5x}{x}$

γ) $\dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-13}{x-15}=\dfrac{x-9}{x-11}-\dfrac{x-15}{x-17}$

Λύση 3.1.2 Επίλυση :

α) $$\begin{aligned}&\frac{x-1}{3x-6}=\frac{x-2}{3x+1}\\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x+1)=(3x-6)(x-2)\\ &\Leftrightarrow 3x^2+x-3x-1=3x^2-6x-6x+12\\ &\Leftrightarrow -2x-1=-12x+12\\ &\Leftrightarrow 12x-2x=12+1 \Leftrightarrow 10x=13 \Leftrightarrow x=\frac{13}{10}=1.3\end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned}&\frac{7-5x}{1+x}=\frac{2-5x}{x}\\ &\Leftrightarrow x(7-5x)=(1+x)(2-5x)\\ &\Leftrightarrow 7x-5x^2=2-5x+2x-5x^2\\ &\Leftrightarrow 7x+5x-2x=2 \Leftrightarrow 10x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Πολλές φορές, αν βλέπουμε πολυπλοκότητα στις πράξεις, θα πρέπει να κοιτάξουμε αν υπάρχει κάποιο κρυφό μοτίβο.

γ) $\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-13}{x-15}=\frac{x-9}{x-11}-\frac{x-15}{x-17}$

$\Leftrightarrow \frac{x-9+2}{x-9}-\frac{x-15+2}{x-15}=\frac{x-11+2}{x-11}-\frac{x-17+2}{x-17}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{x-9}-1-\frac{2}{x-15}=1+\frac{2}{x-11}-1-\frac{2}{x-17}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x-9}-\frac{2}{x-15}=\frac{2}{x-11}-\frac{2}{x-17}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-30-2x+18}{(x-9)(x-15)}=\frac{2x-34-2x+22}{(x-11)(x-17)}$

$\Leftrightarrow \frac{-12}{(x-9)(x-15)}=\frac{-12}{(x-11)(x-17)}$

$\Leftrightarrow (x-9)(x-15)=(x-11)(x-17)$

$\Leftrightarrow x^2-15x-9x=+135=x^2-17x-11x+187$

$\Leftrightarrow -24x+135=-28x+187 \Leftrightarrow 4x=52 \Leftrightarrow x=13$

Άσκηση 3.1.3 Να επιλυθούν οι εξισώσεις ως προς x:

α) $\alpha^2(x-\alpha)+\beta^2(x-\beta)=\alpha\beta x,\quad$ αν $\quad \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\neq 0$

β) $\alpha^2(\alpha-x)-\beta^2(x+\beta)=\alpha\beta x,\quad$ αν $\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\neq 0$

γ) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta},\quad$ αν $\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq 0$

Λύση 3.1.3 Επίλυση :

α) $\alpha^2(x-\alpha)+\beta^2(x-\beta)=\alpha\beta x$

$\Leftrightarrow \alpha^2x-\alpha^3+\beta^2x-\beta^3=\alpha\beta x$

$\Leftrightarrow x(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\alpha^3+\beta^3$

$\Leftrightarrow x(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+\beta$

β) $\alpha^2(\alpha-x)-\beta^2(x+\beta)=\alpha\beta x$

$\Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2x-\beta^2x-\beta^3=\alpha\beta x$

$\Leftrightarrow \alpha^3-\beta^3=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)x$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)x$

$\Leftrightarrow x=\alpha-\beta$

γ) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

Άσκηση 3.1.4 Να διερευνήσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ.

1) $\lambda(1-x)-2x=3\lambda$

2) $\lambda^2 x-2\lambda=4\lambda+x+6$

Λύση 3.1.4 Φέρνουμε τις εξισώσεις στη μορφή $\alpha x+\beta=0$. Είναι για την 1) :

$\lambda(1-x)-2x=3\lambda \Leftrightarrow$

$\lambda-\lambda x-2x=3\lambda \Leftrightarrow$

$(-\lambda-2)x=2\lambda$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- $\lambda \neq -2$, τότε η εξίσωση 1) έχει μοναδική λύση τη

$$x=\frac{2\lambda}{-\lambda-2}$$

- $\lambda=-2$, τότε η εξίσωση 1) παίρνει τη μορφή $0x=-4$, η οποία είναι αδύνατη.

Για την 2η έχουμε παρόμοια :

$\lambda^2 x-2\lambda=4\lambda+x+6 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 x-x=2\lambda+4\lambda+6 \Leftrightarrow$

$(\lambda^2-1)x=6\lambda+6$

Ο συντελεστής του x είναι $\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- $\lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, τότε η εξίσωση 2) έχει μοναδική λύση τη

$$x=\frac{6(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda-1)}=\frac{6}{\lambda-1}$$

- $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση 2) παίρνει τη μορφή $0x = 12$, η οποία είναι αδύνατη.
- $\lambda = -1$, τότε η εξίσωση 2) παίρνει τη μορφή $0x = 0$, η οποία είναι αόριστη.

Άσκηση 3.1.5 Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$\lambda^2 x - \lambda^2 = 9x - 6\lambda + 9$$

είναι 1) αδύνατη, 2) έχει μοναδική λύση.

Λύση 3.1.5 Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = -\beta$.

$$\begin{aligned} &\lambda^2 x - \lambda^2 = 9x - 6\lambda + 9 \Leftrightarrow \\ &\lambda^2 x - 9x = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \Leftrightarrow \\ &(\lambda^2 - 9)x = (\lambda - 3)^2 \end{aligned}$$

1. Η $\alpha x = -\beta$ είναι αδύνατη όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$. Δηλαδή θα πρέπει

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 9 = 0 \\ (\lambda - 3)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3 \\ \lambda \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

2. Η $\alpha x = -\beta$ έχει μοναδική λύση όταν $\alpha \neq 0$. Δηλαδή όταν $\lambda^2 - 9 \neq 0$ ή $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$. Η αρχική εξίσωση έχει τότε μοναδική λύση τη

$$x = \frac{(\lambda - 3)^2}{(\lambda^2 - 9)} = \frac{(\lambda - 3)^2}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 3}$$

Άσκηση 3.1.6 Να λυθεί η εξίσωση :

$$\lambda(\lambda - x) - 3x = 5(\lambda - x) - 6$$

Λύση 3.1.6 Επίλυση :

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - x) - 3x = 5(\lambda - x) - 6 &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda x - 3x = 5\lambda - 5x - 6 \\ &\Leftrightarrow -\lambda x - 3x + 5x = 5\lambda - 6 + -\lambda^2 \\ &\Leftrightarrow (2 - \lambda)x = -\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)x = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

α) $\lambda - 2 \neq 0$ Τότε η εξίσωση έχει μια μηδενική λύση τη $x = \lambda - 3$.

β) $\lambda - 2 = 0$ Τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, δηλαδή αληθεύει για κάθε πραγματικό x.

Άσκηση 3.1.7 Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

α) $|2x - 1| + 3 = 0$

β) $|x - 2| = 3$

Λύση 3.1.7 Επίλυση :

α) $|2x - 1| + 3 = 0 \Leftrightarrow |2x - 1| = -3$ αδύνατη

β) $|x - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$

Άσκηση 3.1.8 Βρείτε το x από τις εξισώσεις:

α) $|2x - 3| = |x - 1|$

β) $|2x - 3| = |x - 2| + |2x - 4|$

Λύση 3.1.8 Επίλυση :

α) $|2x - 3| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x - 1 \\ 2x - 3 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$

β) $|2x - 3| = |x - 2| + |2x - 4| \Leftrightarrow |2x - 3| = |x - 2| + 2|x - 2| \Leftrightarrow |2x - 3| = 3|x - 2|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3(x - 2) \\ 2x - 3 = -3(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3x - 6 \\ 2x - 3 = -3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{9}{5} \end{cases}$

Άσκηση 3.1.9 Να επιλύσετε την εξίσωση:

$$-|x + 1| + |-x + 2| + |x + 3| - 4 = 0$$

Λύση 3.1.9 Βρίσκουμε πρώτα τις ρίζες των υποεκφράσεων με απόλυτα

α) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

β) $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

γ) $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Από τις ρίζες που βρήκαμε κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων :

x	∞	-3	⋯	-1	⋯	2	∞
x+1	-	-	-	0	+	+	+
-x+2	+	+	+	+	+	0	-
x+3	-	0	+	+	+	+	+

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Οπότε η αρχική εξίσωση με απόλυτα μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\begin{cases} -(-x-1)+(-x+2)+(-x-3)-4=0 \quad x\in(\infty,-3) \\ -(-x-1)+(-x+2)-4=0 \quad x=-3 \\ -(-x-1)+(-x+2)+(x+3)-4=0 \quad x\in(-3,-1) \\ (-x+2)+(x+3)-4=0 \quad x=-1 \\ -(x+1)+(-x+2)+(x+3)-4=0 \quad x\in(-1,2) \\ -(x+1)+(x+3)-4=0 \quad x=2 \\ -(x+1)+(x-2)+(x+3)-4=0 \quad x\in(2,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \quad x\in(\infty,-3) \quad \text{δεκτή} \\ 0x=1 \quad x=-3 \quad \text{απορρίπτεται} \\ x=-2 \quad x\in(-3,-1) \quad \text{δεκτή} \\ 0x=1 \quad x=-1 \quad \text{απορρίπτεται} \\ x=0 \quad x\in(-1,2) \quad \text{δεκτή} \\ 0x=2 \quad x=2 \quad \text{απορρίπτεται} \\ x=4 \quad x\in(2,\infty) \quad \text{δεκτή} \end{cases}$$

Συνοψίζοντας, οι λύσεις της $-|x+1|+|-x+2|+|x+3|-4=0$ είναι οι $-4,-2,0$ και 4.

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 3.1.10 Να επιλυθούν οι εξισώσεις :

1) $9-7x=-2x+34$

2) $0=10-3x+8+9x$

3) $11x-3-8x-5=7x$

4) $3-2(x+1)=7-4(x+2)$

5) $8-3(x+3)-(5+x)=-2$

6) $9-(x-4)=11-2(5-x)$

Άσκηση 3.1.11 Να επιλύσετε οι εξισώσεις :

1) $5-(3-x)-3(4+x)=-(-2x)$

2) $(5-y)4-2(y-3)=y-4-3(y+2)$

3) $2(y+2)-8(y-3)=5(5-y)-2(3-y)$

4) $1{,}4(5-4x)-0{,}7(5-6x)=0$

5) $1{,}2-0{,}4(2-3x)=-0{,}2(4x-7)$

6) $5x-3{,}75(x+1)=8{,}75-2{,}5(5-x)$

Άσκηση 3.1.12 Να επιλυθούν οι εξισώσεις :

1) $\dfrac{2(3y+4)}{7}=\dfrac{5+y}{3}$

2) $\dfrac{-3(y-1)}{8}=-\dfrac{y-3}{2}$

3) $-3-\dfrac{2y-3}{4}=1-\dfrac{1-y}{8}$

4) $-\dfrac{y+1}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=1$

5) $\dfrac{2x+3}{10}-\dfrac{x-2}{2}=-\dfrac{x-3}{5}$

6) $2x-\dfrac{3-2x}{6}=1-\dfrac{5-x}{4}$

Άσκηση 3.1.13 Να επιλύσετε τις εξισώσεις :

1) $7-2(x-1)=-2(x-2)-5$

2) $4(x-1)-2(x-2)=3-x-3(1-x)$

3) $3(x-2)-2(1+3x)=-2(x-4)-x-16$

4) $x-\dfrac{1-x}{2}=2x-\dfrac{2x-7}{4}$

5) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{5x-12}{12}$

6) $\dfrac{x+2}{6}-\dfrac{5-x}{2}=-\dfrac{7-2x}{6}+\dfrac{x-3}{3}$

Άσκηση 3.1.14 Να επιλυθούν οι εξισώσεις :

1) $\frac{x+6}{21}+5-\frac{x-12}{3}=\frac{x+1}{2}-\frac{5x+9}{28}$

2) $\frac{3}{4}(x-1)-\frac{5}{3}(x-4)=\frac{8}{5}(x-6)+\frac{5}{12}$

3) $\frac{4x-1}{6}=-\frac{4}{3}\left(-1-\frac{9x+1}{18}\right)$

4) $\frac{3}{5}(x-4)-\frac{2x-9}{3}=0{,}25(x-1)-2$

5) $\frac{x+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{4}}=\frac{2x+3}{6}$

5) $\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{5}{4}-\frac{3}{8}}=\frac{1-\frac{2x}{3}}{1-\frac{1}{4}}$

Άσκηση 3.1.15 Να επιλυθούν οι εξισώσεις :

α) $\frac{2}{5}\left(x-\frac{5}{3}(x+4)\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x-3}{2}-(x+2)\right)$

β) $2\left(-(3-x)-\frac{x-6}{6}\right)=3\left(\frac{1}{3}-\frac{15-5x}{9}\right)$

Άσκηση 3.1.16 Να επιλυθούν οι εξισώσεις ως προς x:

α) $\frac{\alpha-\beta}{x}=\gamma(\alpha-\beta)$

β) $\alpha(\beta-x)+\alpha\beta\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}(\alpha+x)^2$, αν $\alpha\neq 0$

γ) $\frac{x-\alpha+\beta}{x-\alpha}+\frac{x-\beta}{x-2\beta}=\frac{x-\alpha}{x-\alpha-\beta}+\frac{x}{x-\beta}$

Άσκηση 3.1.17 Να επιλυθούν οι εξισώσεις ως προς x:

α) $(\lambda^2-9)x=\lambda^2+3\lambda$

β) $3(\lambda+1)x+4=2x+5(\lambda+1)$

γ) $(\lambda+2)x+4(2\lambda+1)=\lambda^2+4(x-1)$

Άσκηση 3.1.18 Να επιλυθούν οι εξισώσεις ως προς x:

α) $\lambda(x-1)=x+2\mu-7$

β) $\lambda(3x+\lambda)+7-2\lambda=\lambda^2+3(1+\mu x)$

γ) $(\lambda-\mu)x=\lambda^2-(\lambda+\mu)x$

Άσκηση 3.1.19 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda+1)x+2=3(x+2)$. Να βρείτε τον αριθμό λ, αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση τη $x=\frac{1}{3}$.

Άσκηση 3.1.20 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$1)\quad 3-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{4}-2(x-1)$$

$$2)\quad (2\mu-6)x-5=1-\mu(-4x-2)$$

Να βρείτε τον αριθμό μ, ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να έχουν κοινή λύση.

Άσκηση 3.1.21 Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A=\frac{x-1}{5}+4 \quad \text{και} \quad B=1-\frac{9-x}{6}$$

i) Να βρείτε για ποια τιμή του x, οι παραστάσεις Α και Β είναι αντίθετες.
ii) Αν η τιμή του x που βρήκατε είναι λύση της επόμενης εξίσωσης, να βρείτε τον αριθμό α.

$$\frac{x+\alpha}{3}+\frac{5\alpha-x}{9}=\frac{5x-\alpha-3}{18}-\frac{5x-13}{6}+8$$

Άσκηση 3.1.22 Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha=\left(\sqrt{5+\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{8}}\right)^2(5-\sqrt{17})$$

i) Να βρείτε τον αριθμό α.
ii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα (i) να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1-2x}{\alpha^{\frac{3}{4}}}+\frac{3+x}{a^{\frac{1}{4}}}=\frac{2x+5}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{1-10x}{24}$$

Άσκηση 3.1.23 Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$\alpha^2-6\alpha+\beta^2-4\beta+13=0$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς α,β.
ii) Για τις τιμές των α,β, που βρήκατε στο ερώτημα (i), να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{\beta x-\alpha}+\frac{3}{\alpha x-\beta x^2}=\frac{5}{x}$$

Άσκηση 3.1.24 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \beta=\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}\sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $(x^2 - 9)(x^2 - \alpha) = (x^2 - \beta x)(x^2 - \alpha^{\frac{1}{2}} x)$

2) $\dfrac{\alpha\beta}{2x+4} + \dfrac{x+2}{2-x} = \dfrac{x^2}{\alpha - x^2}$

Άσκηση 3.1.25 Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 24 και ο ένας είναι κατά 3 μεγαλύτερος από το διπλάσιο του άλλου. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Άσκηση 3.1.26 Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων οι αντίστροφοι διαφέρουν κατά $\frac{1}{20}$.

Άσκηση 3.1.27 Η Σοφία έχει σήμερα διπλάσια ηλικία από την Άννα. Πριν από 5 χρόνια η Σοφία είχε τριπλάσια ηλικία από την Άννα. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες της Σοφίας και της Άννας.

Άσκηση 3.1.28 Ένας πατέρας είναι σήμερα 41 ετών και ο γιος του είναι 9 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιου του;

Παραμετρικές εξισώσεις

Άσκηση 3.1.29 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $(\lambda+1)(\lambda-4)x = \lambda^2 - 16$ 2) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda - 1$

3) $\lambda^2 x - 4\lambda = 16x - \lambda^2$ 4) $4 - \lambda(\lambda - 2x) = -\lambda^2 x$

Άσκηση 3.1.30 Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $\lambda^2(x+1) = -(-1-\lambda x)$ 2) $\lambda(\lambda x + 6) = \lambda^2 - 9(-1 - x)$

3) $\lambda(2x+1) - 4(1+\lambda x) = \lambda^2(x-1) + \lambda$ 4) $2(\lambda^2 + 2x) - \lambda(4 + \lambda x) = 0$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Άσκηση 3.1.31 Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $\lambda^2(\lambda x - \lambda + 2) - \lambda(x + 1) = 0$
2) $2\lambda^2 x - \lambda^2(\lambda^2 x - 1) = -2\lambda(\lambda x - 1)$
3) $\lambda^3(x - 1) - 6\lambda(x + \lambda) = 3\lambda(x - 3\lambda)$
4) $(\lambda^2 x - 2)(\lambda - 2) + \lambda x - (\lambda - 1)^2 = 2$

Άσκηση 3.1.32 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x + \lambda)^2 = 2\lambda(\lambda - \mu) + (x + \mu)^2$$

δεν είναι ποτέ αδύνατη.

Άσκηση 3.1.33 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x + 4) - 5\lambda(x + \lambda) = -25$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η παραπάνω εξίσωση είναι:
i) Ταυτότητα
ii) Αδύνατη.

Άσκηση 3.1.34 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^3(x - 1) - 3\lambda(3x - 2\lambda) = 9\lambda$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η παραπάνω εξίσωση είναι:
i) Ταυτότητα
ii) Αδύνατη.

Άσκηση 3.1.35 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda(x + 2\lambda) - 3(\lambda^2 - x - 3) = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η παραπάνω εξίσωση έχει:
i) Λύση το -3.
ii) Μοναδική λύση το -3.

Άσκηση 3.1.36 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda(x - 5) = -2(\mu - x - 2)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η παραπάνω εξίσωση είναι:
i) Ταυτότητα
ii) Αδύνατη.

Άσκηση 3.1.37 Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda-2)^2-6(1+x)=(2-2x)(\lambda-1)(\lambda+1)-2\lambda$$

Αν η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1)+\lambda(5x-1)=-2(1+3x)$$

είναι ταυτότητα.

Άσκηση 3.1.38 Δίνονται οι εξισώσεις:

1) $(2\lambda+6)x=\mu^2-4$
2) $(\lambda+3)x=2\lambda+\mu+4$

Να βρείτε τις τιμές των λ και μ, ώστε η (1) να είναι ταυτότητα και η (2) να είναι αδύνατη.

Άσκηση 3.1.39 Δίνονται οι εξισώσεις:

1) $\lambda^2x=1-\lambda(x+\lambda)$
2) $-2\mu x=-\mu(\mu x-1)+\lambda^{2011}-\lambda^{2012}$
3) $\mu(\mu x+1)-\lambda(\lambda-4x)=1$

Αν οι εξισώσεις (1) και (2) είναι ταυτότητες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (3) έχει λύση τον αριθμό 2012^{2011}.

Άσκηση 3.1.40 Δίνονται οι εξισώσεις:

1) $\lambda^2(x+1)=2\left((\lambda-1)^2-1+8x\right)$
2) $\mu^2(x-1)(\mu-10)=5\mu\left(5(3\mu+x)-2(5x+6\mu)\right)$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα και η εξίσωση (2) είναι αδύνατη, τότε:
i) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ,
ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+\lambda^{\frac{1}{2}}}{\mu}-\frac{\lambda x-1}{10}+\frac{\mu x-2}{\lambda^{\frac{3}{2}}}=\frac{x+1}{4}$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Άσκηση 3.1.41 Δίνονται οι εξισώσεις:

1) $(\lambda - 1)(\lambda + 1)x - \mu = 3(x + 1)$

2) $(\mu - 1)^2 x = \lambda - 2\Big(1 - x(5 - \mu)\Big)$

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ, ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να είναι αδύνατες.
ii) Για τα λ και μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda + \mu}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 - \mu - \lambda} = \frac{x - 1}{x^2 + x}$$

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού.

Άσκηση 3.1.42 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $2x(x^2-12)-4(2x-1)=4$

2) $8-x(5x+6)=(x+1)^3-x(x+4)^2$

3) $x^2(x-4)+2x(x-4)+x-4=0$

4) $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$

5) $(x^2+3x)(x-1)=(2x+6)(x^2-1)$

6) $3x(x-3)+(x-3)^2+9-x^2=0$

7) $x(x+1)^2-(x+5)^2+16=0$

8) $(x^2+2)^2=x\left((x+1)^3-(3x^2-x+1)\right)$

Άσκηση 3.1.43 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{3x-1}{x+3}-\dfrac{3x-7}{x-3}=0$

2) $\dfrac{x+3}{x-3}=3-\dfrac{4(x-6)}{x+6}$

3) $2-\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{x}{x+1}$

4) $\dfrac{2x}{3x-6}-\dfrac{x}{2x-4}=1+\dfrac{5x-12}{12-6x}$

5) $\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}$

6) $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+1}=0$

Άσκηση 3.1.44 Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{5x-x^2}=\dfrac{1}{x-5}$

2) $1-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-10}{x^2-2x}-\dfrac{x+2}{x}$

3) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x}{2x-x^2}=-\dfrac{2}{x^2-4}$

4) $\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{2x}{x^2+5x}=\dfrac{1}{25-x^2}$

5) $\dfrac{4}{\frac{2}{x-1}-1}=2$

Εξισώσεις με απόλυτα

Άσκηση 3.1.45 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $|7x-13|+21=0$

2) $3|2x-5|-21=0$

3) $\frac{5-|x-2|}{2}=4$ 4) $\frac{2|5-3x|-1}{9}=1$

Άσκηση 3.1.46 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $2+\frac{|3x-4|-1}{3}=3-\frac{|3x-4|}{3}$ 2) $1-\frac{1+3|x-7|}{4}=\frac{4-|7-x|}{10}+\frac{1}{2}$

3) $\frac{|x-3|}{2}+\frac{|6-2x|}{3}=8-\frac{|3-x|}{6}$ 4) $2|x+3|=|x-5|$

5) $\frac{|2x-1|}{3}=\frac{|3-x|}{2}$ 6) $\frac{|x+1|}{4}-\frac{|3x-2|}{6}=0$

Άσκηση 3.1.47 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $2|x-4|=2-x$ 2) $|1-3x|-3=2x$

3) $x-2|x+2|-4=0$ 4) $|3x-6|=6-3x$

5) $x-|x-13|=13$

Άσκηση 3.1.48 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $|x-2|\,|x+2|=|7x-4|$
2) $|x^2-6x+9|-|-x^2-3|=12$
3) $8-|2x-x^2-1|=-|4x-x^2-4|$
4) $|x^2-4|+|x^2+4x+4|=0$
5) $|x^2-2x-3|+|9-x^2|=0$
6) $|x-4|\,|x+5|=|2x+7|\,|4-x|$

Άσκηση 3.1.49 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $d(x,3)=d(-3,x)=0$
2) $x-d(2x,-6)=4$
3) $\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2-10x+25}=0$
4) $\sqrt{x^2-10x+25}=1-2x$

Άσκηση 3.1.50 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $||5-x|-6| = 2$ 2) $|5-|2x-1|| = 4$

3) $|1-|3-2x|| = 6$ 4) $||x+3|-2| = |x-5|$

5) $|x-|2x-6|| = |x-8|$ 6) $||x|-3| = |2|x|-1|$

Άσκηση 3.1.51 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $2|x+1| - |5-x| = x$
2) $|x-1| - 2|x-2| = 3-x$
3) $\sqrt{x^2-6x+9} + 2\sqrt{x^2+2x+1} = 4$
4) $d(x,1) - d(0,x) - 4 = 2x - d(2x,-3)$

Άσκηση 3.1.52 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $x^2 - 10|x| + 25 = 0$ 2) $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| = 0$

3) $x^2 + 6x + 9 - |x+3| = 0$ 4) $|3-3x| - x^2 + 2x - 1 = 0$

5) $|x^2 - 2x - 9| = x^2 - 6x + 9$ 6) $\dfrac{x^2-3}{|x|-2} = 6$

Άσκηση 3.1.53 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $||x|+2| = x+2$ 2) $|3+|x|| + |-x| = 15 - |2x|$

3) $x^2 - |x-2| + x + 2 = 0$ 4) $\dfrac{|x|+5}{|x|-x} = 4$

5) $|2x+|x|| = 14 - 4|x|$

3.2 Η Εξίσωση $x^ν = α$

Γενικά, η επίλυση της εξίσωσης $x^ν = α$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ν-ιοστή ρίζα του α εκεί όπου αυτή έχει νόημα. Ήδη, σε προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε ν-ιοστές ρίζες. Εδώ, ακολουθώντας το εκπαιδευτικό βιβλίο, θα τις δούμε από τη σκοπιά διερεύνησης ριζών εξίσωσης. Διακρίνουμε τότε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

1. Άν $α > 0$ και ν άρτιος φυσικός αριθμός τότε

$$x^ν = α \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[ν]{α} \\ x = -\sqrt[ν]{α} \end{cases}$$

παράδειγμα

$$x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

2. Άν $α > 0$ και ν περιττός φυσικός αριθμός τότε

$$x^ν = α \Leftrightarrow x = \sqrt[ν]{α}$$

παράδειγμα

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

3. Άν $α < 0$ και ν άρτιος φυσικός αριθμός τότε η $x^ν = α$ είναι αδύνατη.
4. Άν $α < 0$ και ν περιττός φυσικός αριθμός τότε

$$x^ν = α \Leftrightarrow x = -\sqrt[ν]{|α|}$$

παράδειγμα

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-8|} = -2$$

3.2 Η Εξίσωση $x^ν = α$
Σωστό ή Λάθος

1 Η εξίσωση $x^ν = α$, με ν περιττό και $α \in R$ έχει πάντοτε λύση. . . . . **Σ Λ**

2 Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α > 0$ και ν άρτιο φυσικό, έχει ακριβώς δύο λύσεις. . . **Σ Λ**

3.2 Η Εξίσωση $x^\nu = \alpha$
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 3.2.1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $x^7 + 27x^4 = 0$
2) $25x^5 = 16x^3$
3) $x^7 - 8 = x^3 - 8x^4$

Λύση 3.2.1 Έχουμε για την 1)

$$\begin{aligned} & x^7 + 27x^4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4(x^3 + 27) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^4 = 0 \\ x^3 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Για την 2) θα είναι

$$\begin{aligned} & 25x^5 = 16x^3 \\ \Leftrightarrow\ & 25x^5 - 16x^3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^3(25x^2 - 16) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^3 = 0 \\ 25x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 = \frac{16}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Τέλος για την 3) είναι

$$\begin{aligned} & x^7 - 8 = x^3 - 8x^4 \\ \Leftrightarrow\ & x^7 - 8 - x^3 + 8x^4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^7 - x^3) + (8x^4 - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^3(x^4 - 1) + 8(x^4 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^4 - 1)(x^3 + 8) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^4 = 1 \\ x^3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.2.2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $(x^2 - 5)^4 - 256 = 0$
2) $(3x - 1)^4 + 8 = 24x$

Λύση 3.2.2 Θέτοντας $x^2 - 5 = \omega$ η 1) γίνεται

$$\omega^4 - 256 = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega^4 = 256 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt[4]{256} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 4 \\ \omega = -4 \end{cases}$$

Άρα τότε

- $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- $\omega = -4 \Leftrightarrow x^2 - 5 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

  Για την 2) έχουμε

$$(3x - 1)^4 + 8 = 24x$$
$$\Leftrightarrow (3x - 1)^4 - 24x + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 1)^4 - 8(3x - 1) = 0$$

Θέτοντας $3x - 1 = \omega$ έχουμε

$$\omega^4 - 8\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = 2 \end{cases}$$

Δηλαδή θα είναι :

- $\omega = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
- $\omega = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

3.2 Η Εξίσωση $x^ν = α$
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 3.2.3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $8x^3 = 27$
2) $32x^5 + 1 = 0$
3) $2x^5 = 8x^3$
4) $3x^4 + 24x = 0$
5) $5x^6 + 4x^2 = 0$
6) $32x^{11} = -2x^7$

Άσκηση 3.2.4 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $x^4 - 8x = 0$
2) $x^6 - 8x = 0$
3) $2x^5 + 16x^2 = 0$
4) $8x^5 + 27x^2 = 0$
5) $27x^4 + x = 0$
6) $8x^4 + x^2 = 0$

Άσκηση 3.2.5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $(x^3 + 27)(x^4 - 5^4) = 0$
2) $(x^4 - 81)(x^5 + 2^{10}) = 0$
3) $(x^{12} - 16^6)(x^9 + 8^3) = 0$
4) $(3x^{10} - 3^{31})(4x^9 - 2^{20}) = 0$

Άσκηση 3.2.6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $2x^3 = 8x$
2) $x^6 = 81x^2$
3) $2x^5 + 5x^2 = x^5 - 3x^2$
4) $x^3(x^3 + 30) = 3x^3$
5) $2x^2(2x^2 + 3) = 3x^4 - 2x^2$
6) $5x(x^3 - 5) = 2x(2x^3 + 1)$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Η γενική μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

Θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της "συμπλήρωσης του τετραγώνου". Έχουμε :

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (Διακρίνουσα) θα είναι

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις :

1. $\Delta > 0$ Τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές

$$\begin{cases} x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ x = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2. $\Delta = 0$ Τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

3. $\Delta < 0$ Τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Άθροισμα, γινόμενο ριζών, τύποι Vieta

Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, τότε το άθροισμα των ριζών της θα είναι :

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

ενώ για το γινόμενο των ριζών θα έχουμε

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους :

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι Vieta. Η εξίσωση τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα, το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξισώσεως, μας δίνουν τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε το πρόσημο των ριζών της χωρίς να τη λύνουμε. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζουμε στον ακόλουθο πίνακα.

Πρόσημα των ριζών της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	
$\frac{\gamma}{\alpha} < 0$	ρίζες ετερόσημες $\rho_1 < 0 < \rho_2$
$\frac{\gamma}{\alpha} = 0$	οι ρίζες είναι 0 και $\frac{-\beta}{\alpha}$
$\frac{\gamma}{\alpha} > 0, \quad \Delta \geq 0, \quad \frac{-\beta}{\alpha} > 0$	δύο ρίζες θετικές $0 < \rho_1 \leq \rho_2$
$\frac{\gamma}{\alpha} > 0, \quad \Delta \geq 0, \quad \frac{-\beta}{\alpha} < 0$	δύο ρίζες αρνητικές $\rho_1 \leq \rho_2 < 0$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού
Σωστό ή Λάθος

1 Αν $\frac{\gamma}{\alpha}$ τότε $\Delta > 0$. . . . . **Σ Λ**

2 Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες. **Σ Λ**

3 Αν $\gamma > 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει πάντα ρίζες. . . . . **Σ Λ**

4 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι θετικό για κάθε x. . . . . **Σ Λ**

5 Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει μία διπλή ρίζα, τότε $\Delta = 0$. . . . **Σ Λ**

6 Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές ρ_1, ρ_2, τότε θα ισχύει $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x + \rho_1)(x + \rho_2)$. . . . . **Σ Λ**

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 3.3.1 Βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων

α) $x^2 - sx - 1 = 0$

β) $\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0 \quad \alpha \neq 0$

γ) $\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 1 + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad \alpha \neq 0$

Λύση 3.3.1

α) Είναι $\Delta = (-s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = s^2 + 4 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε παρατηρώντας ότι οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι.

β) Είναι $\Delta = (-2\alpha\beta)^2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 = 0$. Άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την

$$\rho = \frac{2\alpha\beta}{2\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

γ) Είναι $\Delta = (-2\alpha)^2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot (1 + \alpha^2\beta^2) = -4\alpha^4\beta^2$. Οπότε

- Αν $\beta \neq 0$ τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές.
- Αν $\beta = 0$ τότε $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την

$$\rho = \frac{2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

Άσκηση 3.3.2 Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ρίζα διπλή;

α) $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + 2\lambda - 2 = 0$

β) $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

γ) $\lambda x^2 - 3(\lambda - 3)x - (2\lambda + 10) = 0 \quad \alpha \neq 0$

Λύση 3.3.2

α) Θα πρέπει $\Delta = 0$ δηλαδή $(\lambda - 1)^2 - 4\lambda(2\lambda - 2) = 0$ ή $-7\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$. Επιλύοντας τώρα την νέα προκύπτουσα δευτεροβάθμια παίρνουμε

$$\Delta = 36 - 4(-7) = 64$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{-14} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{7} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

β) Είναι $\Delta = 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$. Αρα η αρχική εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

γ) Παρόμοια θα πρέπει

$$\begin{aligned}
&\Delta = 0 \Leftrightarrow\\
&9(\lambda-3)^2 - 4\lambda(-(2\lambda+10)) = 0 \Leftrightarrow\\
&9(\lambda^2-6\lambda+9) + 4\lambda(2\lambda+10) = 0 \Leftrightarrow\\
&9\lambda^2 - 54\lambda + 81 + 8\lambda^2 + 40\lambda = 0 \Leftrightarrow\\
&17\lambda^2 - 14\lambda + 81 = 0
\end{aligned}$$

Η προκύπτουσα όμως δευτεροβάθμια δεν έχει πραγματικές ρίζες διότι

$$\Delta = 14^2 - 4\cdot 17\cdot 81 = -5312 < 0$$

άρα η αρχική δεν έχει ρίζα διπλή για καμία τιμή του λ.

Άσκηση 3.3.3 Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 2x + \lambda + 2 = 0$$

έχει α) 2 ρίζες ετερόσημες, β) 2 ρίζες θετικές άνισες, γ) 2 ρίζες αρνητικές.

Λύση 3.3.3 Για αυτή την εξίσωση έχουμε

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+2}{1} = \lambda+2 \quad \Delta = 4 - 4(\lambda+2) = -4\lambda - 4 \quad \frac{-\beta}{\alpha} = 2$$

α) Θα πρέπει

$$\frac{\gamma}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$$

β) Θα πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $\Delta > 0$ αφού $\frac{-\beta}{\alpha} = 2 > 0$

$$\begin{cases} \lambda+2>0 \\ -4\lambda-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda>-2 \\ \lambda<-1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<\lambda<-1$$

γ) Θα πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $\Delta > 0$ και $\frac{-\beta}{\alpha} < 0$. Όμως $\frac{-\beta}{\alpha} = 2 > 0$, άρα δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε να έχουμε δύο ρίζες αρνητικές.

Άσκηση 3.3.4 Για τις ακόλουθες παραστάσεις των ρ_1, ρ_2 βρείτε ισοδύναμες χρησιμοποιώντας μόνο το άθροισμά $\rho_1 + \rho_2$ και το γινόμενό τους $\rho_1\rho_2$.

α) $\rho_1^2 + \rho_2^2$

β) $\rho_1^3 + \rho_2^3$

γ) $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$

δ) $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$

Λύση 3.3.4 Είναι

α) $\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2$

β) $\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1 + \rho_2)^3 - 3\rho_1^2\rho_2 - 3\rho_1\rho_2^2$
$= (\rho_1 + \rho_2)^3 - 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2)$

γ) $\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}$

δ) $\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2} + \dfrac{\rho_2^2}{\rho_1} = \dfrac{\rho_1^3 + \rho_2^3}{\rho_1\rho_2}$
$= \dfrac{(\rho_1 + \rho_2)^3 - 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1\rho_2}$

Άσκηση 3.3.5 Να αποδείξετε ότι αν το άθροισμα δύο πραγματικών αριθμών x και y είναι σταθερό, τότε το γινόμενό τους μεγιστοποιείται όταν οι αριθμοί γίνονται ίσοι.

Λύση 3.3.5 Έστω $S = x + y$ άθροισμα σταθερό και $P = xy$ το γινόμενό τους. Επειδή οι x,y είναι πραγματικοί θα μπορούσαν να είναι και ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - S\omega + P = 0$$

Θα έπρεπε τότε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$P \leq \frac{S^2}{4}$$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή του γινομένου P είναι $P = \frac{S^2}{4}$. Τότε όμως

$$\Delta = S^2 - 4P = S^2 - 4\frac{S^2}{4} = 0$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η δευτεροβάθμια $\omega^2 - S\omega + P = 0$ έχει μία ρίζα διπλή τη

$$x = y = \frac{S}{2}$$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 3.3.6 Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 7|x| - 18 = 0$$

Άσκηση 3.3.7 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 5x - 50 = 0$
β) $2x^2 - 8x = -6$
γ) $3x^2 + 14x - 5 = 0$
δ) $(x^2 - 16)(x^2 + 6x - 7) = 0$

Άσκηση 3.3.8 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$
2) $-x^2 + 2x - 8 = 0$
3) $x^2 + 6x + 9 = 0$
4) $x^2 + 5x + 7 = 0$
5) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$
6) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
7) $-x^2 + 5x - 2 = 0$
8) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

Άσκηση 3.3.9 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $-3x^2 + 12x = 0$
2) $2x^2 + 8x = 0$
3) $36 - 16x^2 = 0$
4) $-4x^2 - 16x = 0$
5) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
6) $-\sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x = 0$

Άσκηση 3.3.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

2) $5x^2 - (\sqrt{2} - 10)x - 2\sqrt{2} = 0$

3) $x^2 - \sqrt{8}x - \sqrt{2} = 0$

4) $0{,}3x^2 + 0{,}9x - 3 = 0$

5) $-0{,}1x^2 + x - 2{,}5 = 0$

6) $0{,}1x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$

Άσκηση 3.3.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$

2) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$

3) $\frac{x^2}{2} - 4x - \frac{5}{8} = 0$

4) $(3x^2 - 48)(-x^2 - 4x + 32) = 0$

5) $(9x^2 - 6x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$

6) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + x + \frac{1}{4}) = 0$

Άσκηση 3.3.12 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

1) $(x - 1)^2 = 4x - 5(2x + 1)$

2) $(x - 1)^3 - x(x - 2)(x + 2) = 1$

3) $(x + 2)^3 - x(x - 3)^2 = 15 - (3x + 1)(1 - 3x)$

4) $\frac{x-2}{2} - \frac{x(6-x)}{6} = \frac{x(x-2)}{6} - \frac{x^2-2}{3}$

5) $\frac{5}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$

6) $\frac{x(3x-2)}{3} - \frac{(2x-1)^2+2}{6} = 1 - \frac{x-6}{2}$

Άσκηση 3.3.13 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x^2 + 2x - 9| = 0$

β) $|x^2 + 3x - 5| = |2x^2 - 4x + 5|$

γ) $|x - 3| = x^2 - x - 6$

Παραμετρικές εξισώσεις 2^ου^ βαθμού, διερεύνηση.

Άσκηση 3.3.14 Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $-2x^2 + (a - 3)x + a - 1 = 0$

β) $2x^2 + (a - 2b)x - a(a + 2b) = 0$

Άσκηση 3.3.15 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ :

α) $(\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$
β) $(\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$

Άσκηση 3.3.16 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε:

α) $\alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0$ με $\alpha \neq 0$
β) $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2 x - \alpha^2\beta^2 = 0$ με $\alpha^2 \neq \beta^2$
γ) $x^2 - (\alpha + \frac{1}{\alpha})x + 1 = 0$ με $\alpha \neq 0$
δ) $(\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)x + \beta + \gamma = 0$ με $\alpha \neq -\gamma$

Άσκηση 3.3.17 Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ :

α) $\frac{x^2}{2} + (\lambda + 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
β) $x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$
γ) $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

Άσκηση 3.3.18 Αν η εξίσωση

$$x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0$$

είναι αδύνατη.

Άσκηση 3.3.19 Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση :
i) Έχει δύο ρίζες άνισες
ii) Έχει μία διπλή ρίζα

iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες

Άσκηση 3.3.20 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση :

i) Έχει δύο ρίζες άνισες
ii) Έχει μία διπλή ρίζα
iii) Είναι αδύνατη
iv) Έχει λύση

Άσκηση 3.3.21 Δίνονται οι εξισώσεις :

1) $x^2 - x - 12 = 0$
2) $x^2 + (2\lambda - 9)x + \lambda^2 - 6\lambda = 0$

Η μικρότερη ρίζα της (1) είναι και ρίζα της (2). Να βρεθεί :

i) Το λ,
ii) Οι ρίζες της (2)

Άσκηση 3.3.22 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ,
ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η διπλή ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(-3,5)$.

Άσκηση 3.3.23 Δίνονται οι εξισώσεις :

1) $x^2 + (\lambda + 3)x - 4\lambda + 2 = 0$
2) $x^2 + (1 - 2\lambda)x - 3\lambda - 4 = 0$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, οι παραπάνω εξισώσεις έχουν την ίδια διακρίνουσα.
ii) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε τις εξισώσεις.

Άσκηση 3.3.24 Η εξίσωση :

$$(\lambda^3 + 10)x^2 + (2\lambda^3 + 4)x + \mu^2 + 4\mu + 22 = 0$$

έχει διπλή ρίζα το 3. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ.

Άσκηση 3.3.25 Έστω η εξίσωση :

$$1)\quad x^2 + (2\lambda + 1)x + |6 - 3\lambda| = 0$$

i) Να βρεθεί το λ, εάν είναι γνωστό ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα το -1.
ii) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρέθηκε στο παραπάνω ερώτημα έστω η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$ (2). Να βρεθεί το μ, ώστε η (2) να έχει διπλή ρίζα.

Άσκηση 3.3.26 Η εξίσωση :

$$(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$$

έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε :
i) Το λ,
ii) Τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

Άσκηση 3.3.27 Η εξίσωση :

$$2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + (\alpha - 2)(\beta + 4) - 2 = 0$$

έχει μία διπλή ρίζα. Να βρεθούν :
i) Οι αριθμοί α και β,
ii) Η διπλή ρίζα της εξίσωσης.

Άσκηση 3.3.28 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + \sqrt{\lambda + 3}x + \lambda = 0$$

i) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες
ii) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

Άσκηση 3.3.29 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0$$

i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (\sqrt{3} - 3)^2$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση
iii) Αν ρ η άρρητη ρίζα της εξίσωσης να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$α = \frac{1}{ρ} - \frac{ρ}{2}$$

είναι ακέραιος.

Άσκηση 3.3.30 Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση

$$x^2 + (λ - 5)x - λ + 4 = 0$$

i) Έχει μία διπλή ρίζα.
ii) Έχει δύο ρίζες αντίστροφες.
iii) Έχει δύο ρίζες αντίθετες.
iv) Έχει δύο ρίζες ετερόσημες.
v) Έχει δύο ρίζες θετικές.

Άσκηση 3.3.31 Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση

$$-x^2 + (λ - 7)x + λ - 6 = 0$$

i) Έχει μία διπλή ρίζα.
ii) Έχει δύο ρίζες αντίστροφες.
iii) Έχει δύο ρίζες αντίθετες.
iv) Έχει δύο ρίζες ετερόσημες.
v) Έχει δύο ρίζες αρνητικές.

Άσκηση 3.3.32 Δίνεται η εξίσωση

$$(λ + 2)x^2 + 2λx + λ - 1 = 0$$

i) Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
ii) Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε:

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = -\frac{2}{3}$$

Άσκηση 3.3.33 Δίνεται η εξίσωση

$$2x^2 - 4x + λ - 3 = 0$$

i) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές.
ii) Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε:

α) $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 = 8$

β) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$

Άσκηση 3.3.34 Δίνεται η εξίσωση

$$x^4 + (\lambda^3 + 8)x^3 - 10x^2 + 5 - 2\lambda = 0$$

i) Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να είναι διτετράγωνη.
ii) Για την τιμή του λ που βρέθηκε να λυθεί η εξίσωση.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Άσκηση 3.3.35 Να βρεθεί το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των εξισώσεων :

α) $x^2 - 7x + 4 = 0$

β) $-x^2 - 3x - 1 = 0$

γ) $-\sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x + \sqrt{12} = 0$

δ) $\sqrt{6}x^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}x - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$

Άσκηση 3.3.36 Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 6$ και $x_1 \cdot x_2 = 4$.
i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
ii) Να λύσετε την εξίσωση.

Άσκηση 3.3.37 Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1^3 + x_2^3$ ε) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ζ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Άσκηση 3.3.38 Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
δ) $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)$ ε) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ ζ) $(x_1^2 - x_1x_2)(x_1x_2 - x_2^2)$

Άσκηση 3.3.39 Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $x_1^2 + x_2^2$
δ) $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2$ ε) $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3}$ ζ) $(x_1^3x_2 + 2x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3)$

Άσκηση 3.3.40 Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) -6 και 1 β) $\frac{1}{2}$ και -2 γ) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ και $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ δ) $1 + \alpha$ και $1 - \alpha$

Άσκηση 3.3.41 Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) x_1^2 και x_2^2 β) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Άσκηση 3.3.42 Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 3 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $\frac{x_1}{x_2}$ και $\frac{x_2}{x_1}$ β) $\frac{x_1}{x_1+2}$ και $\frac{x_2}{x_2+2}$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού, διτετράγωνες, κλασματικές.

Άσκηση 3.3.43 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ 2) $-3x^2 + 10|x| - 8 = 0$

3) $3x^2 + |x| - 2 = -3(|x| + 1)$ 4) $-3x^2 + |-5x| - 2 = 0$

Άσκηση 3.3.44 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $(x-2)^2 = 7|x| + 1 - x(x+4)$ 2) $5|x| = 1 - \dfrac{(x-3)(x+3)}{2}$

Άσκηση 3.3.45 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

3) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$ 4) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

5) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$ 6) $\sqrt{x}(\sqrt{x-2}) = 3$

Άσκηση 3.3.46 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $(3x-5)^2 + 7(3x-5) - 8 = 0$ 2) $(2x-3)^2 - 6(3-2x) - 7 = 0$

3) $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$ 4) $(2x-1)^2 - 8|2x-1| + 15 = 0$

5) $-(x-3)^2 + 5|3-x| - 6 = 0$

Άσκηση 3.3.47 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $\dfrac{x-10}{x^2-4} - \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2}{x+2}$ 2) $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{7}{x^2-x} = \dfrac{x+3}{x^2+3x}$

3) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{5x-20}{x^2-4x} = -\dfrac{14}{x^2+2x}$ 4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}} + \dfrac{4}{x-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{5}{4}$

Άσκηση 3.3.48 Να λυθούν οι εξισώσεις :

1) $(2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2-4x+1} + 3 = 0$

2) $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x-\dfrac{2}{x}\right) + 4 = 0$

3) $6\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)^2 - \left(\dfrac{10x}{x-3}\right) - 6 = 0$

4) $\dfrac{x^2-3}{2x} + \dfrac{2x}{x^2-3} = 2$

5) $|x^2-x| + |x^2-11x+10| = 0$

6) $|x^2-4|x|+3| + |x^4-10x^2+9| = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Οι ανισώσεις $αx+β>0$ **και** $αx+β<0$. Η επίλυση, διερεύνηση ανισώσεων είναι παρόμοια με την επίλυση, διερεύνηση εξισώσεων του ιδίου βαθμού. Αυτό συμβαίνει γιατί η επίλυση, διερεύνηση μιας εξίσωσης ή ανίσωσης, είναι κατ'ουσία μια προσπάθεια εντοπισμού των ριζών του υποκείμενου πολυωνύμου. Σε γενική μορφή, η διερεύνηση της $αx+β>0$, έχει ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} &α\cdot x+β>0 \Leftrightarrow \\ &α\cdot x>-β \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $α>0$ τότε η ανίσωση έχει λύση την

$$\begin{aligned} α\cdot x>-β &\Leftrightarrow \frac{α\cdot x}{α}>\frac{-β}{α} \\ &\Leftrightarrow x>-\frac{β}{α} \end{aligned}$$

- Αν $α<0$ τότε η ανίσωση έχει λύση την

$$\begin{aligned} α\cdot x>-β &\Leftrightarrow \frac{α\cdot x}{α}<\frac{-β}{α} \\ &\Leftrightarrow x<-\frac{β}{α} \end{aligned}$$

- Αν $α=0$ τότε η ανίσωση γίνεται $0\cdot x>-β$ και εξετάζουμε το β
  i. Αν $β>0$ τότε η ανίσωση είναι ταυτότητα.
  ii. Αν $β\leq 0$ τότε η ανίσωση είναι αδύνατη.

Σχόλιο Η διερεύνηση της $αx+β<0$ εκτελείται παρόμοια. Παρατηρείστε ακόμη, ότι η λύση μιας ανίσωσης προσδιορίζεται γενικά με ένα διάστημα και όχι με ένα πραγματικό όπως στην λύση μιας εξίσωσης.

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής, μπορούμε να επιλύσουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Ας θυμηθούμε από τις απόλυτες τιμές ότι, αν α σημείο του πραγματικού άξονα και r θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η ανισότητα

$$|x-\alpha| \le r$$

ερμηνεύεται σαν το διάστημα $[\alpha - r, \alpha + r]$. Οι παρακάτω ισοδυναμίες αποτελούν τη βάση για τη λύση ανισώσεων με απόλυτες τιμές και θα πρέπει να τις γνωρίζουμε καλά.

$$|x-\alpha| \le r \Leftrightarrow \alpha - r \le x \le \alpha + r \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - r \le x \\ \text{και} \\ x \le \alpha + r \end{cases}$$

$$|x-\alpha| \ge r \Leftrightarrow x - \alpha \le -r \text{ ή } x - \alpha \ge r \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \alpha - r \\ \text{ή} \\ x \ge \alpha + r \end{cases}$$

Τέλος οι παρακάτω συμβολισμοί είναι ισοδύναμοι

$$|x-\alpha| \le r \qquad \alpha - r \le x \le \alpha + r \qquad d(x,\alpha) \le r \qquad x \in [\alpha - r; \alpha + r]$$

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού
Σωστό ή Λάθος

1 Ισχύει: $x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ . . . . **Σ Λ**

2 Ισχύει: $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x = 1$ . . . . **Σ Λ**

3 Ισχύει: $(x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $x > 5$ . . . . **Σ Λ**

4 Ισχύει: $\alpha x \ge \alpha \Rightarrow x \ge 1$ . . . . **Σ Λ**

5 Ισχύει: $|x-5| < 2 \Leftrightarrow x \in (3, 5)$ . . . . **Σ Λ**

6 Ισχύει: $x > 4$ και $x < -4 \Leftrightarrow |x| > 4$ . . . . **Σ Λ**

7 Ισχύει: $d(x, 1) < 2 \Leftrightarrow |x-1| < 2$ . . . . **Σ Λ**

8 Η ανίσωση $|x+1| \le 0$ δεν αληθεύει για καμία τιμή του x. . . . . **Σ Λ**

9 Η ανίσωση $\left|-|x|-1\right| \ge 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$. . . . . **Σ Λ**

4.1 Ανισώσεις $1^{ου}$ Βαθμού
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 4.1.1 Να λυθούν οι ανισώσεις.

$$\text{i) } |x-1|<3 \quad \text{ii) } |x+2|<-2 \quad \text{iii) } |x+7|\le 0$$

Λύση 4.1.1 Έχουμε

i) $|x-1|<3 \Leftrightarrow -3<x-1<3 \Leftrightarrow -2<x<4$

ii) Είναι αδύνατη αφού $|x+2|\ge 0$.

iii) $|x+7|\le 0 \Leftrightarrow x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$.

Άσκηση 4.1.2 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x}{3}-\frac{2x-1}{4}>\frac{x}{12}$$

Λύση 4.1.2 Ε.Κ.Π είναι το 12, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{x}{3}-\frac{2x-1}{4}>\frac{x}{12} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4x}{12}-\frac{3(2x-1)}{12}>\frac{x}{12} \\ \Leftrightarrow\ & 4x-6x+3>x \\ \Leftrightarrow\ & 3x<3 \\ \Leftrightarrow\ & x<1 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.1.3 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3x+2}{4}\ge\frac{5x}{4}$$

Λύση 4.1.3 Ε.Κ.Π είναι το 4, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2}+\frac{3x+2}{4}\ge\frac{5x}{4} \\ \Leftrightarrow\ & 2(x-1)+3x+2\ge 5x \\ \Leftrightarrow\ & 2x-2+3x+2\ge 5x \\ \Leftrightarrow\ & 0x\ge 0 \text{ αληθής για κάθε } x\in R \end{aligned}$$

Άσκηση 4.1.4 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x}{\alpha^2+1}+\frac{x-1}{\alpha^2+1}>2 \quad \alpha \in R$$

Λύση 4.1.4 Επειδή $\alpha^2+1>0$ μπορούμε να κάνουμε απαλειφή παρανομαστών. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\alpha^2+1}+\frac{x-1}{\alpha^2+1}>2 \\ \Leftrightarrow\quad & x+x-1>2(\alpha^2+1) \\ \Leftrightarrow\quad & 2x>2\alpha^2+3 \\ \Leftrightarrow\quad & x>\alpha^2+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.1.5 Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

1) $\frac{x+2}{4}-\frac{x}{3}\le 1$

2) $\frac{x}{5}-\frac{x+1}{15}<0$

Λύση 4.1.5 Έχω για την 1)

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{4}-\frac{x}{3}\le 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 3(x+2)-4x\le 12 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x+6-4x\le 12 \\ \Leftrightarrow\quad & -x\le 6 \Leftrightarrow x\ge -6 \end{aligned}$$

Ενώ για την 2) είναι

$$\begin{aligned} & \frac{x}{5}-\frac{x+1}{15}<0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x-x-1<0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Οπότε οι ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-6, \frac{1}{2})$.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση 4.1.6 Να λυθεί η ανίσωση $\lambda(x+1) \geq 1-2x$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ.

Λύση 4.1.6 Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $\alpha x + \beta \geq 0$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} & \lambda(x+1) \geq 1-2x \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda+2)x \geq 1-\lambda \end{aligned}$$

και διακρίνουμε περιπτώσεις

- $\lambda+2>0 \Leftrightarrow \lambda>-2$ τότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$x \geq \frac{1-\lambda}{\lambda+2}$$

- $\lambda+2<0 \Leftrightarrow \lambda<-2$ τότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$x \leq \frac{1-\lambda}{\lambda+2}$$

- $\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$ τότε η ανίσωση γίνεται $0x \geq 3$ που είναι αδύνατη.

Άσκηση 4.1.7 Να λυθεί η ανίσωση $\alpha x + 3 \leq \beta - x$ για τις διάφορες τιμές των α,β.

Λύση 4.1.7 Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $\alpha x + \beta \geq 0$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} & \alpha x + 3 \leq \beta - x \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha+1)x \leq \beta - 3 \end{aligned}$$

και διακρίνουμε περιπτώσεις

- $(\alpha+1)>0 \Leftrightarrow \alpha>-1$ τότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$x \leq \frac{\beta-3}{\alpha+1}$$

- $(\alpha+1)<0 \Leftrightarrow \alpha<-1$ τότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$x \geq \frac{\beta-3}{\alpha+1}$$

- $(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ τότε η ανίσωση γίνεται $0x \leq \beta-3$ (2), οπότε
  1. $\beta-3 \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 3$.Τότε η (2) αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.
  2. $\beta-3<0 \Leftrightarrow \beta<3$.Τότε η (2) είναι αδύνατη.

Άσκηση 4.1.8 Να λυθεί η ανίσωση $|x-2| \leq 6$.

Λύση 4.1.8 Είναι :

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 6 & \Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 6 \\ & \Leftrightarrow -6+2 \leq x \leq 6+2 \\ & \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8 \\ & \Leftrightarrow x \in [-4, 8] \end{aligned}$$

Άσκηση 4.1.9 Να λυθεί η ανίσωση $|x| \geq \theta$, όπου θ θετικός.

Λύση 4.1.9 Είναι :

$$\begin{aligned} |x| \geq \theta &\Leftrightarrow |x|^2 \geq \theta^2 \\ &\Leftrightarrow |x|^2 - \theta^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \theta^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta) \geq 0 \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία, θα πρέπει οι (x - θ) και (x + θ) να είναι ομόσημοι. Δηλαδή

$$\begin{cases} x - \theta \geq 0 \text{ και } x + \theta \geq 0 \Rightarrow x \geq \theta \\ \text{ή} \\ x - \theta \leq 0 \text{ και } x + \theta \leq 0 \Rightarrow x \leq -\theta \end{cases}$$

Άσκηση 4.1.10 Να λυθούν οι ανισώσεις

$$\text{i) } |x+1| \geq 2 \quad \text{ii) } \frac{|x-1|}{|x-2|} > 1$$

Λύση 4.1.10

i) $|x+1| \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2$ ή $x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq -3$

ii)

$$\begin{aligned} & \frac{|x-1|}{|x-2|} > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |x-1| > |x-2| \\ \Leftrightarrow \quad & |x-1|^2 > |x-2|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 > (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x + 1 > x^2 - 4x + 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.1.11 Να λυθεί η ανίσωση $|2 - |x-1|| < 3$.

Λύση 4.1.11 Είναι :

$$|2 - |x-1|| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2 - |x-1| < 3 \Leftrightarrow -5 < -|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x-1| < 5$$

Λύνουμε χωριστά κάθε μία ανίσωση

1. $|x-1| > -1$ που είναι αληθής για κάθε x.
2. $|x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

   Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο $(-4, 6)$.

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση 4.1.12 Να λυθεί η ανίσωση $|x + 1| - |x - 2| > 2x$.

Λύση 4.1.12 Κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων

x		-1		2	
x+1	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+

Έτσι έχουμε :

1. Για $x < -1$ τότε $|x + 1| = -x - 1$ και $|x - 2| = -x + 2$. Έτσι η αρχική γίνεται

$$-x - 1 - (-x + 2) > 2x \Leftrightarrow 2x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$$

συναλήθευση $x \in (\infty,\ -\frac{3}{2})$

2. Για $-1 \leq x < 2$ τότε $|x + 1| = x + 1$ και $|x - 2| = -x + 2$. Έτσι η αρχική γίνεται

$$x + 1 - (-x + 2) > 2x \Leftrightarrow 0x < -1 \quad \text{αδύνατο}$$

3. Για $x \geq 2$ τότε $|x + 1| = x + 1$ και $|x - 2| = x - 2$. Έτσι η αρχική γίνεται

$$x + 1 - (x - 2) > 2x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \quad \text{μη αποδεκτό}$$

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 4.1.13 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $2x - 1 > 5$
2) $3 - 2x < 15$
3) $2x - 3 < 15 - x$
4) $5 - 4x \leq 29 - x$
5) $7 + 2x \leq 3 + 4x$
6) $5 - 3x \leq 2x + 5$

Άσκηση 4.1.14 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $2(x + 1) \geq 3x - 4$
2) $2(x - 1) - 3(x + 2) \leq x - 1$
3) $4(x + 1) + 2(x - 2) \geq 5(x - 1)$
4) $2(x + 3) + 5(x - 1) \leq 7(x + 3)$
5) $4x - 9 \geq 3 - 2x + 3(x - 5)$
6) $6(2x + 7) < 15(x + 2)$

Άσκηση 4.1.15 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

1) $3(x - 2) + 4 > 13$
2) $10 - 2(x - 1) < -4$
3) $7 - 5(x - 1) \geq 12$
4) $3 - (2x - 5) \leq 2 - x$
5) $6 - (7 + 2x) < -(x + 1)$
6) $1 - (x - 1) \geq 3 - 5(2 - x)$

Άσκηση 4.1.16 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $3(2x + 7) - 4(15 - x) \leq 29 + 12x$
2) $2(4x + 5) - 3(x + 3) \leq -5x - 9(1 - x)$
3) $-6(x - 2) - (5 - 3x) < 9(x + 3) - 2x$
4) $-3(7 + 3x) - (8 + 7x) > -x - 11(x + 1)$
5) $(x + 2)^2 - 2(x - 2)^2 \leq 25 - (x + 1)^2$
6) $4x - (x - 1)^2 > 8 - (x - 3)(x + 3)$

Άσκηση 4.1.17 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $\frac{2x+5}{3} > 7$

2) $\frac{7-3x}{2} \geq 8$

3) $\frac{5-2x}{5} + 9 \geq 0$

4) $7 - \frac{3x-4}{2} < 0$

5) $-1 - \frac{2x-7}{3} < \frac{2}{3}$

6) $1 + \frac{x}{2} > \frac{3x+2}{4}$

Άσκηση 4.1.18 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $2 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{5}{6}$

2) $\frac{2}{3} - \frac{5-7x}{6} > x - 2$

3) $3 - \frac{x-2}{5} \geq \frac{4}{3}$

4) $\frac{3x+1}{2} - \frac{2x-4}{3} < 1$

5) $3 - \frac{2x+1}{3} \leq -\frac{x-1}{2}$

6) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{4} < 2 - \frac{x-2}{3}$

Άσκηση 4.1.19 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $\frac{x+4}{3} > \frac{7x-5}{2}$

2) $\frac{7x-3}{4} - \frac{9x+4}{8} > 0$

3) $\frac{5x-2}{9} - \frac{x+7}{6} > x - 1$

4) $\frac{x-3}{2} - \frac{x+4}{3} < \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{2}$

5) $\frac{x-1}{3} + 2 < 2x - \frac{5x}{3}$

6) $\frac{x-2}{3} - \frac{x}{4} < \frac{x+1}{12}$

Άσκηση 4.1.20 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

1) $3x - 5 > 4(x-1) - x$

2) $4(x-6) - 2(3-x) \leq 6(x-5)$

3) $x - 6(2-x) > 3x - 4(3-x)$

4) $3(x+4) - 4(2x+1) > -5(x-2)$

5) $2(x+1) \geq 4 - (x+3) - 3(2-x)$

6) $13 - 3(x-2) < 4(x+3) - 7(x-3)$

Άσκηση 4.1.21 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $2(x+2)+\frac{1}{6}<\frac{4x+9}{2}$ 2) $\frac{x-3}{2}-\frac{x+5}{6}>\frac{x-3}{3}$

3) $\frac{17}{4}-\frac{15-x}{2}\le x-\frac{x-3}{2}$ 4) $\frac{2}{5}-\frac{3-x}{2}<\frac{x-1}{10}-\frac{3-2x}{5}$

5) $\frac{7-3x}{12}-\frac{3-2x}{3}\le\frac{x-2}{4}-\frac{5-x}{6}$ 6) $\frac{x+1}{6}-\frac{1+x}{12}\ge\frac{x-1}{16}-\frac{2x+1}{4}$

Άσκηση 4.1.22 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν:

1) $3(x-1)+2x<x+1$ και $2(x+3)-x\ge 2$

2) $3x-2(1-x)>2x+7$ και $-5x\ge 12-2(7x-3)$

3) $-4(x+2)\ge 6-2(x-3)$ και $-3(x-4)\ge 7-5(x+1)$

4) $5-3(x-1)>-4$ και $-2-(-x-1)\le 1$

5) $5-4(2-x)<3-2(1-2x)$ και $8-5(2-x)\le 11-6(2-x)$

Άσκηση 4.1.23 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν:

1) $2-\frac{1-3x}{2}\ge 0$ και $\frac{x+2}{2}>\frac{4+3x}{5}$

2) $1-\frac{1-x}{2}<x$ και $1-\frac{4-x}{4}\ge\frac{x+4}{8}$

3) $3-\frac{1-2x}{1}\ge\frac{1}{2}$ και $6-\frac{x+20}{7}\ge\frac{3x+30}{7}$

4) $\frac{4x-3}{5}-x>\frac{6}{15}$ και $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}\le\frac{5}{4}$

5) $\frac{2x+3}{4}>x-\frac{x+1}{2}$ και $2(x+4)-\frac{3x+15}{2}>0$

6) $\frac{4x-8}{-5}\le 0$ και $\frac{x-3}{1}>2x-\frac{3x+1}{2}$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση 4.1.24 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν:

1) $\frac{3x}{4}+\frac{7}{8}<\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ και $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3}<2$

2) $\frac{x-3}{4}-x<\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}$ και $2-x>2x-8$

3) $\frac{5x}{1}+3x>-14$ και $-3(x-4)<6$

4) $4x-1>\frac{x}{2}-8$ και $2x+1<\frac{5x+4}{3}$

5) $\frac{x-1}{5}-x<\frac{4-x}{2}$ και $1+\frac{3x}{2}<x$

Άσκηση 4.1.25 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

1) $\lambda x+6\leq 3\lambda+2x$

2) $\lambda(2x-\lambda)\geq\lambda(x-4)$

3) $2(\lambda-x-1)\geq(\lambda-3)x$

4) $2-(\lambda-1)x>3(x+4)$

Άσκηση 4.1.26 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

1) $\lambda(x-\lambda)<3(x-3)$

2) $\lambda(x-4)\geq(\lambda-2)(\lambda+2)-4(x-1)$

3) $\lambda(x+5)<\lambda^2-2(-x-3)$

4) $-\lambda(x-2\lambda+2)>\lambda(\lambda-1)^2-x$

Άσκηση 4.1.27 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

1) $\frac{\lambda x-\lambda}{3}\geq\frac{x-\lambda}{4}-\frac{x+4}{6}$

2) $\frac{(\lambda-3)x}{6}\leq 1-\frac{\lambda}{3}$

Άσκηση 4.1.28 Δίνεται η ανίσωση :

$$(\lambda+3)x\geq 2(\mu-2x)-3(2-3x)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση είναι αδύνατη.

Άσκηση 4.1.29 Δίνεται η ανίσωση :

$$\lambda(x-2) \geq 3(\mu - x)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Άσκηση 4.1.30 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $|2x| \geq 8$
2) $|x-5| < 2$
3) $|x+4| \geq 3$
4) $|3x-6| > 9$
5) $|1-2x| \geq 5$
6) $|-x-2| \geq -2$

Άσκηση 4.1.31 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $|5-2x| < 0$
2) $|6-x| - 4 \leq 0$
3) $|2x+7| - 1 > 0$
4) $6 - |4x-2| \geq 0$
5) $|3-x| - 2 \geq 0$
6) $|1-2x| \geq 5$

Άσκηση 4.1.32 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $4|2x-3| - 12 > 0$
2) $3 - \dfrac{|x-1|}{3} \geq 1$
3) $\dfrac{|1-2x|-3}{2} \leq 4$
4) $\dfrac{7-|x+5|}{4} < 1$
5) $\dfrac{2|3-x|+3}{5} \leq 3$
6) $\dfrac{7-3|2x+1|}{4} > 1$

Άσκηση 4.1.33 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $|x+4| - 5 \leq \dfrac{2|x+4|+4}{3}$
2) $\dfrac{15|x-2|-9}{2} \leq 8|x-2| - 7$

3) $\frac{3}{4} - \frac{4|7x+3|}{3} > 2 + \frac{|7x+3|}{8}$

4) $\frac{|x+21|}{6} \leq \frac{5}{3} + |x+21|$

5) $\frac{2|3-x|+3}{5} \leq 3$

6) $\frac{7-3|2x+1|}{4} > 1$

Άσκηση 4.1.34 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $d(x,3) > |2x+2| - d(x,-1)$

2) $|2x-4| + d(x,2) \leq 12 - |2-x|$

3) $||x|+3| \geq 9 - |2x|$

4) $||x-1|+1| \geq 7 - |1-x|$

5) $\frac{|x|+8}{|x|+3} < 2$

6) $\frac{5|x|-3}{|x|+1} \leq 3$

7) $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3}$

8) $3(|x|-1) + 2(|x|-2) > 2$

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Η παράσταση $αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού ή, πιο απλά τριώνυμο. Όπως ήδη έχουμε δεί σε προηγούμενη ενότητα, ένα τριώνυμο μπορεί να μετασχηματιστεί με τη μέθοδο της "συμπλήρωσης του τετραγώνου" ως εξής :

$$αx^2 + βx + γ =$$
$$α\left(x^2 + \frac{β}{α}x + \frac{γ}{α}\right) =$$
$$α\left(x^2 + \frac{β}{α}x + \left(\frac{β}{2α}\right)^2 - \left(\frac{β}{2α}\right)^2 + \frac{γ}{α}\right)$$
$$α\left(\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 - \frac{β^2 - 4αγ}{4α^2}\right)$$

Αν θέσουμε $Δ = β^2 - 4αγ$ (Διακρίνουσα) τότε μετασχηματίζεται σε

$$α\left(\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 - \frac{Δ}{4α^2}\right)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός αποκτά έννοια όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το πρόσημο του τριωνύμου, δηλαδή πότε γίνεται θετικό και πότε αρνητικό. Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις :

1. $Δ > 0$ Τότε το τριώνυμο παίρνει τη μορφή

$$α\left(\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)^2\right)$$
$$= α\left(x + \frac{β}{2α} + \frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)\left(x + \frac{β}{2α} - \frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right) = α(x - ρ_1)(x - ρ_2)$$

από όπου είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α όταν το x είναι εντός του διαστήματος $ρ_1 < x < ρ_2$ και ομόσημο του α όταν το x βρίσκεται εκτός.

2. $Δ = 0$ Τότε το τριώνυμο παίρνει τη μορφή

$$α\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2$$

και συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, εκτός της διπλής ρίζας όπου γινεται μηδέν.

3. $Δ < 0$ Τότε $-Δ = |Δ|$ και το τριώνυμο γίνεται

$$α\left(\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 + \frac{|Δ|}{4α^2}\right)$$

όπου συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του α.

Συνοψίζουμε τα συμπεράσματά μας ως ακολούθως. Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ γίνεται :

- Ετερόσημο του α, μόνο όταν $Δ > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
- Μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- Ομόσημο του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται για την επίλυση ανισώσεων της μορφής $αx^2 + βx + γ > 0$ ή $αx^2 + βx + γ < 0$, $α \neq 0$ τις οποίες ονομάζουμε ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

4.2 Ανισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού
Σωστό ή Λάθος

1 Το τριώνυμο $-(x-2)^2$ έχει $Δ < 0$ . . . . **Σ Λ**

2 Αν x_1, x_2 οι ρίζες του $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ τότε $αx^2 + βx + γ = α(x - x_1)(x - x_2)$ . . **Σ Λ**

3 Άν ένα τριώνυμο έχει $Δ < 0$ τότε είναι πάντα αρνητικό . . . . **Σ Λ**

4 Άν ένα τριώνυμο έχει $Δ < 0$ τότε δεν έχει πραγματικές ρίζες . . . . **Σ Λ**

5 Άν ένα τριώνυμο έχει $Δ > 0$ τότε έχει δύο πραγματικές ρίζες, άνισες . . . . **Σ Λ**

6 Όταν $-2 < λ < 2$ η ανίσωση $x^2 - λx + 1 > 0$ είναι αληθής για κάθε x . . . . . **Σ Λ**

7 Αν το $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ έχει $Δ < 0$ τότε $α \cdot Δ > 0$ . . . . **Σ Λ**

8 Αν το $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ έχει $α \cdot γ < 0$ τότε $Δ > 0$ . . . . **Σ Λ**

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 4.2.1 Να λυθεί η ανίσωση

$$x^2 - 2x + 1 < 4$$

Λύση 4.2.1 Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 < 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 < 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 16 > 0$ και οι ρίζες είναι -1 και 3 οπότε

$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x-3) < 0$$

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων

x		-1		3	
x+1	-	0	+	+	+
x-3	-	-	-	0	+

Δηλαδή, το τριώνυμο $(x-1)(x-3)$ γίνεται αρνητικό για $x \in (-1, 3)$, που είναι και οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης.

Άσκηση 4.2.2 Να αποδείξετε ότι η ανισότητα

$$-x^2 + \sqrt{2}x - 1 < 0$$

ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση 4.2.2 Για το τριώνυμο του 1ου μέλους, έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sqrt{2})^2 - 4(-1)(-1) \\ &= 2 - 4 = -2 < 0 \end{aligned}$$

οπότε είναι ομόσημο του $\alpha = -1$, δηλαδή πάντα αρνητικό.

Άσκηση 4.2.3 Να λυθεί η ανίσωση

$$x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} > 0$$

Λύση 4.2.3 Βρίσκουμε τη διακρίνουσα Δ. Είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ &= \left(-(1+\sqrt{3})\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\sqrt{3} \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Είναι Δ > 0 άρα βρίσκουμε ρίζες: Είναι τότε

$$x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{3} \pm (1-\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \sqrt{3}$$

Έτσι η ανίσωση ισοδυναμεί με

$$(x-1)(x-\sqrt{3}) > 0$$

Είναι $\alpha = 1 > 0$ και από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του α όταν το x βρίσκεται εκτός των ριζών. Σε αυτή την περίπτωση, το τριώνυμο $x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3}$ γίνεται θετικό για $x \in (-\infty, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, που είναι και οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης. Ο παρακάτω πίνακας προσήμων δείχνει παραστατικότερα ότι έχουμε βρεί

x		1		$\sqrt{3}$	
$x-1$	-	0	+	+	+
$x-\sqrt{3}$	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-\sqrt{3})$	+	0	-	0	+

Άσκηση 4.2.4 Να αποδείξετε ότι η ανισότητα

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{6} \geq x$$

ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση 4.2.4 Η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{3x^2}{2} - x + \frac{1}{6} \geq 0$$

και για το τριώνυμο του 1ου μέλους, έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\frac{3}{2}\frac{1}{6} = 0$$

οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = \frac{3}{2}$, δηλαδή πάντα ≥ 0.

Άσκηση 4.2.5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$-x^2 + (2\lambda - 1)x + 3\lambda + 10 = 0 \quad (1)$$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$.

Λύση 4.2.5 Είναι

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4(-1)(3\lambda + 10) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 12\lambda + 40$$
$$= 4\lambda^2 + 8\lambda + 41 \quad (2)$$

Αυτό είναι πάλι τριώνυμο για το οποίο βρίσκουμε νέα διακρίνουσα

$$\Delta_\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 41 = -592$$

Επειδή η διακρίνουσα για το (2) τριώνυμο είναι $\Delta_\Delta < 0$, αυτό το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του $\alpha = 4$, δηλαδή πάντα θετικό. Με άλλα λόγια, η διακρίνουσα του αρχικού τριωνύμου (1) είναι πάντα θετική, οπότε το αρχικό τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$.

Άσκηση 4.2.6 Δίνεται η ανίσωση

$$x^2 - x + (\kappa - 2) \geq 0 \quad (1) \quad \text{όπου}$$
$$\kappa \in Z \quad \text{και} \quad \kappa^2 - 5\kappa - 6 < 0$$

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου έτσι ώστε η ανίσωση (1) να αληθεύει για κάθε $x \in R$.

Λύση 4.2.6 Για να αληθεύει η ανίσωση (1) για κάθε $x \in R$, πρέπει $\Delta \leq 0$. Τότε

$$\Delta = 1 - 4(\kappa - 2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -4\kappa + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \kappa \geq \frac{9}{4} \quad (2)$$

επίσης

$$\kappa^2 - 5\kappa - 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\kappa + 1)(\kappa - 6) < 0 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 6 \quad (3)$$

Από (2) και (3) προκύπτει ότι $\frac{9}{4} \leq \kappa < 6$ και επειδή $\kappa \in Z$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa \in \{3, 4, 5\}$.

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 4.2.7 Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

1) $5x^2-3x-2$
2) $-x^2+x+2$
3) $\frac{1}{2}x^2-x$
4) $3x^2-6x-2$
5) $2x^2+5x+6$
6) $-x^2+4x-4$

Άσκηση 4.2.8 Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

1) $4x^2-4x+1$
2) $-x^2+2x-1$
3) x^2+x+2
4) $-2x^2+x-1$
5) $2x^2+3$
6) $-x^2+\frac{1}{2}$

Άσκηση 4.2.9 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2-9x+14>0$
2) $2x^2+x+9>0$
3) $x^2-1<0$
4) $3x^2+x+2>0$
5) $x^2-x+3\le 0$
6) $4-x^2\ge 0$

Άσκηση 4.2.10 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2+2x-3>0$
2) $x^2-3x-10\le 0$
3) $-x^2+3x+4\le 0$
4) $-x^2+4x+12>0$
5) $2x^2+5x-3\ge 0$
6) $-3x^2+4x+4\ge 0$

Άσκηση 4.2.11 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ 2) $-x^2 + 6x - 9 < 0$

3) $2x^2 - 4x + 2 < 0$ 4) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

5) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ 6) $4x^2 - 12x + 9 > 0$

Άσκηση 4.2.12 Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

1. $1 - 2x < 0$ και $x^2 \leq 11x - 10$
2. $2x^2 < 1$ και $x(1 - 2x) \leq -1$
3. $x^2 < 16$ και $x^2 > 3x$ και $x^2 > 4x - 4$

Άσκηση 4.2.13 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 - x + 2 > 0$ 2) $2x^2 - 5x + 4 < 0$

3) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$ 4) $-3x^2 + 3x - 1 \leq 0$

5) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$ 6) $3x^2 - 6x + 3 < 0$

Άσκηση 4.2.14 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 - 5x < 0$ 2) $x^2 + 3x \geq 0$

3) $-x^2 + 4x \leq 0$ 4) $-x^2 + 6x \geq 0$

5) $2x^2 - 5x \geq 0$ 6) $-3x^2 + 4x > 0$

Άσκηση 4.2.15 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 - 9 \leq 0$ 2) $x^2 - 16 \leq 0$

3) $x^2 < 25$ 4) $\frac{x^2}{1} \geq 18$

5) $4x^2 - 25 > 0$ 6) $-9x^2 + 16 \geq 0$

Άσκηση 4.2.16 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 < 1$ 2) $4x^2 > 9$

3) $x^2 < 3$ 4) $1 - 2x^2 < 0$

5) $16x^2 > 9$ 6) $-25x^2 + 64 > 0$

Άσκηση 4.2.17 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $5x^2 > x + 4$ 2) $x(1 - 2x) \geq -1$

3) $(x - 1)^2 > x - 4$ 4) $x^2 < 3x$

5) $\frac{3x}{2} < x^2$ 6) $x - 1 < \frac{5x^2 - 2}{1}$

Άσκηση 4.2.18 Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

1. $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$
2. $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$
3. $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$

Άσκηση 4.2.19 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2 \leq 3x$ 2) $x^2 > -7x$

3) $-2x^2 \leq 4x$ 4) $-x > \frac{x^2}{4}$

5) $-\frac{x}{6} \geq -x^2$ 6) $x \leq -x^2$

Άσκηση 4.2.20 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $(3x - 2)^2 > 9$ 2) $(5x - 3)^2 < 1$

3) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 4) $4x^2 > 4x - 1$

5) $9x^2 \leq 6x - 1$ 6) $x^2 < 2x - 1$

Άσκηση 4.2.21 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $(x+3)^3 > 4(2x+3)$

2) $4(x-5)-(x-4)(x+4) \geq 0$

3) $2x(x-2)-(x-1)^2 < -4$

4) $2(x-3)(x+3)-(x-1)^2 < -11$

5) $(x+1)^2 \geq \dfrac{5-x}{2}$

6) $x^2+1-\dfrac{(x+2)^2}{5} > 0$

Άσκηση 4.2.22 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο

$$x^2-14x+25$$

παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26.

Άσκηση 4.2.23 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^2-5|x|+6 > 0$

2) $(2x-1)^2-3|2x-1|+2 < 0$

3) $x^2-6|x|+8 > 0$

4) $x^4-10x^2+9 \geq 0$

5) $x^4-5x^2+4 \leq 0$

6) $2x^2-5|x|+2 > 0$

Άσκηση 4.2.24 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $\dfrac{|x-3|}{|x+1|} \geq 2$

2) $\dfrac{|x+2|}{|x+4|} \leq \dfrac{1}{2}$

3) $|1-x|-3|x+5| > 0$

4) $2|x+3|-3|x-3| \leq 0$

5) $|x^2+3x-1| < 3$

6) $|x^2-2x+8| > 8$

Άσκηση 4.2.25 Να κάνετε τον πίνακα προσήμων για το τριώνυμο $-x^2+x+2$ και να λύσετε την ανίσωση

$$|-x^2+x+2| \leq 1-x(x+6)$$

Άσκηση 4.2.26 Να κάνετε τον πίνακα προσήμων για το τριώνυμο x^2+x-6 και να λύσετε την ανίσωση

$$|x^2+x-6| \leq 1x^2-3x+2$$

Άσκηση 4.2.27 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει :

1. $x^2 + 2x - 4 < 3x(x - 1)$
2. $(x - 3)(x + 3) > 2(2x - 7)$
3. $28 - (x + 2)^2 > 2(x - 3)(x + 3)$

Άσκηση 4.2.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$x^2 - (3\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$.

Άσκηση 4.2.29 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$x^2 - \lambda x = \lambda + 3$$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$.

Άσκηση 4.2.30 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$.

Άσκηση 4.2.31 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες.

1. $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$
2. $(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x = \lambda + 1, \quad \lambda \neq -1$

Άσκηση 4.2.32 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$$

έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

Άσκηση 4.2.33 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda + 7 = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 4.2.34 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Άσκηση 4.2.35 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda + 12 = 0$$

έχει ετερόσημες ρίζες.

Άσκηση 4.2.36 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το τριώνυμο :

$$(2\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1,\ \lambda \neq \frac{1}{2}$$

είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 4.2.37 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το τριώνυμο :

$$(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2,\ \lambda \neq 1$$

είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 4.2.38 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το τριώνυμο :

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x - \lambda,\ \lambda \neq 1$$

είναι αρνητικό για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 4.2.39 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ το τριώνυμο :

$$\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda,\ \lambda \neq 1$$

είναι αρνητικό για κάθε $x \in R$.

4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο

Ανισώσεις της μορφής

$$A(x)B(x)\cdots\Phi(x) > 0 \quad (< 0)$$

Για να βρούμε το πρόσημο ενός γινομένου της μορφής $P(x) = A(x)B(x)\cdots\Phi(x)$, βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα ξεχωριστά και κατόπιν το πρόσημο όλου του γινομένου $P(x)$.

Εδώ, σιωπηρά υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε (ή μπορούμε να βρούμε) τις ρίζες κάθε παράγοντα $A(x), B(x), \cdots, \Phi(x)$. Για αυτά που θα μας απασχολήσουν, κάθε παράγοντας θα είναι κάποιο πρωτοβάθμιο πολυώνυμο της μορφής $\alpha x + \beta$ ή ένα τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Ανισώσεις της μορφής

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (< 0)$$

Επειδή

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x), B(x) \text{ ομόσημα } \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x) > 0$$

η επίλυση της ανίσωσης του πηλικου ανάγεται στην επίλυση της ανίσωσης του γινομένου $A(x)\cdot B(x) > 0$

4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο
Σωστό ή Λάθος

1 Ισχύει $(-1)(-2)(-3)\cdots(-99) < 0$ . . . . **Σ Λ**

2 $x-1 > x-3$ και $x-2 > x-4 \Rightarrow (x-1)(x-2) > (x-3)(x-4)$ . . . . **Σ Λ**

3 Άν $2 < x < 3$ τότε $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$ . . . . **Σ Λ**

4 Τα πολυώνυμα $(x-2)^{37}$ και $(x-2)$ είναι πάντοτε ομόσημα . . . . **Σ Λ**

4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 4.3.1 Να βρείτε το πρόσημο του

$$f(x) = (1-3x)(2x+4)(4-x)(x-6)(7-x)$$

Λύση 4.3.1 Βρίσκουμε τις ρίζες των πρωτοβάθμιων παραγόντων. Αυτές είναι

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = -2, \quad x = 4, \quad x = 6, \quad x = 7$$

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων όπως παρακάτω

x		-2		1|3		4		6		7	
1-3x	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-
2x+4	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4-x	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-
x-6	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
7-x	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-
f(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Άσκηση 4.3.2 Να βρεθεί το πρόσημο του

$$f(x) = (2-x)^6(x-4)^7(3-x)^{2004}(5-x)^{2003}$$

Λύση 4.3.2 Βρίσκουμε τις ρίζες των πρωτοβάθμιων παραγόντων. Αυτές είναι

$$x = 2, \quad x = 4, \quad x = 3, \quad x = 5$$

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων. Τις δυνάμεις με περιττούς εκθέτες τις θεωρούμε σαν δύναμη με εκθέτη 1. Τις δυνάμεις με άρτιους εκθέτες τις θεωρούμε θετικές.

x		2		3		4		5	
$(2-x)^6$	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-4)^7$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(3-x)^{2004}$	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$(5-x)^{2003}$	+	+	+	+	+	+	+	0	-
f(x)	-	0	-	0	-	0	+	0	-

Άσκηση 4.3.3 Να λυθεί η ανίσωση

$$(2x-1)(1-5x)(x^2-5x+6) \leq 0$$

Λύση 4.3.3 Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων. Αυτές είναι

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}, \quad \text{και} \quad x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των προσήμων. Το τριώνυμο, επειδή $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$, γίνεται αρνητικό (ετερόσημο του α) όταν το x βρίσκεται εντός των ριζών.

x		1|5		1|2		2		3	
2x-1	-	-	-	0	+	+	+	+	+
1-5x	+	0	-	-	-	-	-	-	-
(x-2)(x-3)	+	+	+	+	+	0	-	0	+
f(x)	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Άσκηση 4.3.4 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} < 2$$

Λύση 4.3.4 Μετασχηματίζουνε διαδοχικά την παράσταση. Είναι για $x \neq -\frac{1}{3}$ και $x \neq 1$:

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x(3x-1)+(3x-1)(x-1)-2(x-1)(3x+1)}{(x-1)(3x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x^2-2x+3x^2-3x-x+1-6x^2-2x+6x+2}{(x-1)(3x+1)} < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2-2x+3}{(x-1)(3x+1)} < 0 \Leftrightarrow (3x^2-2x+3)(x-1)(3x+1) < 0$$

Το τριώνυμο $3x^2-2x+3$ έχει αρνητική διακρίνουσα και είναι πάντα θετικό. Έτσι έχουμε :

x		-1|3		1	
x-1	-	-	-	0	+
3x + 1	-	0	+	+	+
$3x^2-2x+3$	+	+	+	+	+
f(x)	+	∞	-	∞	+

Άρα $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Άσκηση 4.3.5 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{1}{x} \geq x$$

Λύση 4.3.5 Μετασχηματίζουνε διαδοχικά την ανίσωση. Είναι για $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (1-x^2)x \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

Οι ρίζες είναι ± 1 και 0. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

x		-1		0		1	
$1-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
x	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	+	0	-	∞	+	0	-

Άρα $x \in (-\infty, 1] \cup (0, 1]$.

Άσκηση 4.3.6 Να λυθεί η ανίσωση

$$(1-x)(x+2) \leq (x-3)x$$

Λύση 4.3.6 Μετασχηματίζουνε διαδοχικά την ανίσωση. Έχουμε :

$$(1-x)(x+2) - (x-3)x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 2 - x^2 - 2x - x^2 + 3x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 2x + 2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \geq 0 \text{ διαίρεση με } -2$$

Οι ρίζες είναι

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
x^2-x-1	+	0	-	0	+
f(x)	+	0	-	0	+

Άρα $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

Άσκηση 4.3.7 Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{8}{x-2} \geq x$$

Λύση 4.3.7 Μετασχηματίζουνε διαδοχικά την ανίσωση. Είναι για $x \neq 2$:

$$\frac{8}{x-2} - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8-x(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+2x+8}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-x^2+2x+8)(x-2) \geq 0$$

Για το τριώνυμο είναι $\Delta = 2^2 - 4(-1)8 = 36$ και έχει ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = 4$

Κατασκευάζουμε τέλος τον πίνακα προσήμων

x		-2		2		4	
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$-x^2+2x+8$	-	0	+	+	+	0	-
f(x)	+	0	-	∞	+	0	-

Άρα $x \in (-\infty,\ -2] \cup (2, 4]$.

4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 4.3.8 Να βρείτε το πρόσημο του

$$f(x) = (2 - 5x)(x - 3)(x + 7)$$

Άσκηση 4.3.9 Να βρείτε το πρόσημο του

$$f(x) = (1 - x)^{50}(x + 2)^{51}(3 - x)^{52}(2x - 8)^{53}$$

Άσκηση 4.3.10 Να λυθούν οι ανισώσεις

1) $(x^2 - 9x + 14)(x - 4) < 0$

2) $(x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 1)(2x - 1) > 0$

3) $(2x^2 - 5x - 7)(x^2 - 1)(3x^2 + 7) < 0$

Άσκηση 4.3.11 Να λυθούν οι ανισώσεις

1) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} > 0$

2) $\dfrac{x^2(x + 2)(x - 3)^3}{(x + 4)^2(x - 5)^5} \leq 0$

3) $\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1} < \dfrac{2}{3}$

4) $\dfrac{x^2}{8x + 20} > 1$

Άσκηση 4.3.12 Να λυθούν οι ανισώσεις

1) $\dfrac{x^2}{x + 1} > 2$

2) $\dfrac{2}{3x + 1} > \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}$

3) $x^3 + 1 > x^2 + x$

4) $x^4 - 1 \geq x^3 - x$

Άσκηση 4.3.13 Να λυθεί το σύστημα ανισώσεων

$$-1 < \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)} < 1$$

Άσκηση 4.3.14 Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ τα πρόσημα των γινομένων :

1) $(x-2)(x^2-3x-4)$
2) $(x+3)(-x^2-3x+10)$
3) $(4-x)(x^2-9)$
4) $(1-x)(-x^2+x+6)$
5) $(x-5)(x^2+4x+4)$
6) $(x+2)(-x^2+x-2)$

Άσκηση 4.3.15 Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ τα πρόσημα των γινομένων :

1) $(x-1)(x-2)(x-3)$
2) $-(2x-1)(x+1)(3x-1)$
3) $(3x-1)(x^2-4)$
4) $(3x-x^2)(x^2-1)$
5) $(x-1)(x-2)^2$
6) $(-2x+1)(x-2)^2$

Άσκηση 4.3.16 Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ τα πρόσημα των γινομένων :

1) $(3x-1)(x^2+5)$
2) $(5-x^2)(|x|+1)$
3) $2x^3-x^2-x$
4) $-3x^3+x^2+2x$
5) x^3+8
6) $27x^3-1$

Άσκηση 4.3.17 Να λυθεί η ανίσωση :

$$(x-3)^{1999}(x+2)^{2000}(x^2-x)^{2001} \leq 0$$

Άσκηση 4.3.18 Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ τα πρόσημα των γινομένων :

1) $(x^2-9)(x^2-4x-5)$
2) $(x^2-1)(-x^2+2x+3)$
3) $(x^2+2x+4)(-x^2+2x+15)$
4) $(16-x^2)(x^2+4x)$
5) $(x^2-x-6)(-x^2+6x-9)$
6) $x(x^2-4)(x^2-4x+4)$

Άσκηση 4.3.19 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $(x-2)(x^2+2x-3)>0$

2) $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2)<0$

3) $(x^2-3x+2)(1-x^2)(x^2+x+2)>0$

4) $(x-3)(x^2-4x+3)\leq 0$

5) $(x^2-4)(-x^2+3x+10)\geq 0$

6) $(x^2-7x+12)(-x^2+5x-6)\leq 0$

Άσκηση 4.3.20 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $(x-1)(x-2)(x-5)>0$

2) $(-x+1)(-5x-3)(x+2)\geq 0$

3) $(3x-1)(x^2+5)(x^2-4)<0$

4) $(-3x-2)(x-1)(5+2x)\leq 0$

5) $(7-x)(8x+12)(6x-12)\leq 0$

6) $(x^3-x)(-x^2+x-5)>0$

Άσκηση 4.3.21 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $(x-1)(x-2)^2>0$

2) $(x+1)(x-1)^2\leq 0$

3) $x^3>1$

4) $(x^2-4)(x^2-5x+6)<0$

5) $(3x-2)(x^2-2x+1)\geq 0$

6) $x^3+8\leq 0$

Άσκηση 4.3.22 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η ανίσωση :

$$\frac{x^2+\lambda x-1}{2x^2-2x+3}<1$$

αληθεύει για κάθε $x\in R$.

Άσκηση 4.3.23 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $x^3+4x^2-12x\geq 0$

2) $x^3+3x^2<4x+12$

3) $x^5-5x^3+4x<0$

4) $4x^2+5x>x^3$

5) $x^4>8x$

6) $x^4-16\leq 0$

Άσκηση 4.3.24 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

1) $(x+2)(x^2-4x)\leq 0$ και $(x-2)(x^2+4x+3)>0$

2) $(x-2)(x^2+2x-15)\geq 0$ και $(x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3)>0$

3) $(x-2)(x^2+x-2)<0$ και $-x^3-2x^2+15x\leq 0$

Άσκηση 4.3.25 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $\dfrac{3}{x+4}\geq 0$

2) $\dfrac{x-2}{x+4}\geq 0$

3) $\dfrac{x+3}{6-x}\geq 0$

4) $\dfrac{-2}{3-x}<0$

5) $\dfrac{5-x}{x+1}\geq 0$

6) $\dfrac{1-x}{4-x}\geq 0$

Άσκηση 4.3.26 Να λυθούν οι ανισώσεις :

1) $\dfrac{3x}{2x^2+1}>1$

2) $\dfrac{x}{x^2-4}>0$

3) $\dfrac{7x^2-x-6}{9-x^2}\leq 0$

4) $\dfrac{x}{x^2-x+1}<1$

5) $\dfrac{x^2-3x}{4x^2-1}\leq 0$

6) $\dfrac{x^2}{x+2}>1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

Αν σε κάθε φυσικό αριθμό $1, 2, 3, \cdots,$ αντιστοιχίσουμε ένα πραγματικό αριθμό α_ν, λέμε τότε ότι οι αριθμοί

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_\nu \cdots,$$

σχηματίζουν μία ακολουθία. Δηλαδή, ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \cdots,$ στους πραγματικούς αριθμούς. Καλούμε τον α_1 πρώτο όρο της ακολουθίας, τον α_2 δεύτερο όρο της ακολουθίας και γενικά τον α_ν νιοστό όρο της ακολουθίας.

Αυτή η αντιστοίχιση των φυσικών στους πραγματικούς, δηλαδή ο προσδιορισμός μιας ακολουθίας, γίνεται συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

1. Ο α_ν δίνεται συναρτήσει του ν. Λέμε τότε ότι η ακολουθία έχει **κλειστό τύπο**.

   Παραδείγματα :

   i) $\alpha_\nu = (-1)^\nu \quad = 1, -1, 1, -1, 1, \cdots,$

   ii) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu} \quad = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots,$

   iii) $\alpha_\nu = \nu^2 \quad = 1, 4, 9, 16, 25, \cdots,$

   iv) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2+1}{3\nu} \quad = \dfrac{3}{3}, \dfrac{9}{6}, \dfrac{19}{9}, \dfrac{33}{12}, \dfrac{51}{15}, \cdots,$

2. Ο α_ν δίνεται με **αναδρομικό τύπο**, δηλαδή συναρτήσει του προηγούμενου (ή αμέσως προηγούμενων) όρων. Παραδείγματα :

   i) $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + 1, \quad \alpha_1 = 1 \quad = 1, 3, 7, 15, 31, \cdots,$

   ii) $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}, \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2 \quad = 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots,$ (fibonacci)

3. Ο α_ν δίνεται περιφραστικά. Παραδείγματα :

   i) Η ακολουθία των πρώτων αριθμών. $= 2, 3, 5, 7, 11, \cdots,$ για την οποία δεν έχει βρεθεί ως τώρα κλειστός ή αναδρομικός τύπος.

   ii) Ο α_ν είναι το νιοστό ψηφίο μετά την υποδιαστολή στην δεκαδική ανάπτυξη του π. $= 1, 4, 1, 5, 9, \cdots,$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_\nu \cdots$, μια οποιαδήποτε ακολουθία, τότε βάση αυτής μπορούμε να ορίσουμε μια νέα ακολουθία $S_1, S_2, S_3, \cdots S_\nu \cdots$, μερικών αθροισμάτων της (α_ν), ως ακολούθως

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 \\ S_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\cdots \\ S_{\nu-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1} \\ S_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \end{aligned}$$

Είναι τότε προφανές ότι αν γνωρίζουμε (έχουμε κάποιο τύπο), για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_ν τότε γνωρίζουμε και την α_ν, διότι ισχύει :

$$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}$$

2. Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, από και τον φυσικό κ έως και τον φυσικό ν, $\kappa < \nu$, υπάρχουν $(\nu - \kappa + 1)$ φυσικοί αριθμοί ενώ προσδιορίζονται $(\nu - \kappa)$ μοναδιαία διαστήματα.
3. Άν α,β θετικοί ακέραιοι όπου $\alpha < \beta$ τότε

$$\text{πολλαπλάσια του } \alpha \leq \beta = \text{ακέραιο μέρος του } \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor$$

5.1 Ακολουθίες
Σωστό ή Λάθος

1 Υπάρχουν ακολουθίες για τις οποίες δεν γνωρίζουμε έως τώρα ένα κλειστό ή ένα αναδρομικό τύπο. . . . . **Σ Λ**

2 Εάν έχουμε ένα κλειστό τύπο για τα μερικά αθροίσματα μιας ακολουθίας, τότε έχουμε και κλειστό τύπο για την ακολουθία. . . . . **Σ Λ**

5.1 Ακολουθίες
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 5.1.1 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

1) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$ 2) $\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu^\nu}$ 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}$ 4) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$

Λύση 5.1.1

1.

$$\alpha_\nu = 2\nu + 1$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad \alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5, \quad \alpha_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$\alpha_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9, \quad \alpha_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11,$$

2.

$$\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu^\nu}$$

$$\alpha_1 = \frac{2^1}{1^1} = 2, \quad \alpha_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1, \quad \alpha_3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27},$$
$$\alpha_4 = \frac{2^4}{4^4} = \frac{16}{256}, \quad \alpha_5 = \frac{2^5}{5^5} = \frac{32}{3125},$$

3.

$$\alpha_\nu = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}$$

$$\alpha_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0, \quad \alpha_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}, \quad \alpha_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3},$$

4.

$$\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$$

$$\alpha_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1, \quad \alpha_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3},$$
$$\alpha_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}, \quad \alpha_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5},$$

Άσκηση 5.1.2 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

1) $\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\nu\pi}{4}$ 2) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ 3) $\alpha_\nu = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$ 4) $\alpha_\nu = \frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu}$

Λύση 5.1.2

1.

$$\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\nu\pi}{4}$$

$$\alpha_1 = \eta\mu\frac{1\cdot\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \alpha_2 = \eta\mu\frac{2\cdot\pi}{4} = 1,\quad \alpha_3 = \eta\mu\frac{3\cdot\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha_4 = \eta\mu\frac{4\cdot\pi}{4} = 0,\quad \alpha_5 = \eta\mu\frac{5\cdot\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

2.

$$\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

$$\alpha_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2,\quad \alpha_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\alpha_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27},\quad \alpha_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256},$$

$$\alpha_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125},$$

3.

$$\alpha_\nu = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$$

$$\alpha_1 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2},\quad \alpha_2 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\alpha_3 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 1+\frac{1}{8} = \frac{9}{8},\quad \alpha_4 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

$$\alpha_5 = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = 1+\frac{1}{32} = \frac{33}{32},$$

4.

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{1+1}}{1} = \sqrt{2},\quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2+1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{3+1}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{4+1}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4},\quad \alpha_5 = \frac{\sqrt{5+1}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

Άσκηση 5.1.3 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

1) $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{1+\alpha_\nu}$, $\alpha_1 = 1$

2) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$, $\alpha_1 = 0$

3) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1$, $\alpha_1 = 1$

4) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = 1$

Λύση 5.1.3

1.

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{1+\alpha_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{1+\alpha_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{1+\alpha_4} = \frac{1}{1+\frac{6}{5}} = \frac{5}{11},$$

2.

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 = 0 + 1 = 1,$$

$$\alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2, \quad \alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5,$$

$$\alpha_5 = \alpha_4^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26,$$

3.

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2\alpha_1 + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2 + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7, \quad \alpha_4 = 2\alpha_3 + 1 = 2\cdot 7 + 1 = 15,$$

$$\alpha_5 = 2\alpha_4 + 1 = 2\cdot 15 + 1 = 31,$$

4.

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2,$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1 = 2 + 1 = 3, \quad \alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_2 = 3 + 2 = 5,$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 + \alpha_3 = 5 + 3 = 8,$$

Άσκηση 5.1.4 Βρείτε τον αναδρομικό τύπο για την ακολουθία :

$$\alpha_\nu = 11\nu + 13$$

Λύση 5.1.4 Επειδή

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 11(\nu+1) + 13 - (11\nu + 13) = 11$$

ο αναδρομικός τύπος είναι

$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 11$ όπου

$\alpha_1 = 24$

Άσκηση 5.1.5 Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

1) $\alpha_\nu = \nu + 5$ 2) $\alpha_\nu = 2^\nu$

3) $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ 4) $\alpha_\nu = 5\nu + 3$

Λύση 5.1.5

1.

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (\nu + 1) + 5 - (\nu + 5) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 1 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 6$$

2.

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 2$$

3.

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2^{\nu+1} - 1 - 2^\nu + 1 = 2^\nu$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2^\nu \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 2$$

Όμως $\alpha_\nu = 2^\nu - 1 \Leftrightarrow 2^\nu = \alpha_\nu + 1$ άρα τελικά

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 1$$

4.

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) + 3 - (5\nu + 3)$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5\nu + 5 + 3 - 5\nu - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = 8$$

Άσκηση 5.1.6 Βρείτε τον αναδρομικό τύπο για την ακολουθία :

$$\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu + 1$$

Λύση 5.1.6 Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για παρόμοιες ασκήσεις δεν υπάρχει συγκεκριμένος αλγοριθμικός τρόπος επίλυσης. Για τη συγκεκριμένη άσκηση, οδηγούμενοι από μαθηματική διαίσθηση, ή από άλλη σκοπιά αν θέλετε, για να την καλλιεργήσουμε, ας θεωρήσουμε τη διαφορά $\alpha_\nu - 2\alpha_{\nu-1}$. Θα είναι τότε :

$$\alpha_{\nu+1} - 2\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu+1} + 1 - 2(3 \cdot 2^\nu + 1)$$
$$= 3 \cdot 2^{\nu+1} + 1 - 3 \cdot 2^{\nu+1} - 2 = -1$$

άρα ο αναδρομικός τύπος είναι

$\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu - 1$ όπου

$\alpha_1 = 7$

Άσκηση 5.1.7 Να βρείτε το ν-οστό όρο των ακολουθιών

1) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 1$, $\alpha_1 = 1$

2) $\alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$, $\alpha_1 = 3$

Λύση 5.1.7

Για την 1) είναι

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + 2 \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + 2 \\ \alpha_4 &= \alpha_3 + 2 \\ &\ldots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} + 2 \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} + 2 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατα μέλη

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + 2(\nu - 1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 2\nu - 2$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 1$$

Για την 2) είναι

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 5\alpha_1 \\ \alpha_3 &= 5\alpha_2 \\ \alpha_4 &= 5\alpha_3 \\ &\ldots \\ \alpha_{\nu-1} &= 5\alpha_{\nu-2} \\ \alpha_\nu &= 5\alpha_{\nu-1} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατα μέλη

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 5^{\nu-1}\alpha_1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$$

Άσκηση 5.1.8 Τα μερικά αθροίσματα μιας ακολουθίας α_ν δίνονται από τον τύπο

$$S_\nu = \frac{\nu}{\nu + 1}$$

Να βρείτε τον τύπο της ακολουθίας α_ν.

Λύση 5.1.8 Θα είναι

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= S_\nu - S_{\nu-1} \\ &= \frac{\nu}{\nu+1} - \frac{\nu-1}{\nu} \\ &= \frac{\nu^2 - (\nu-1)(\nu+1)}{\nu(\nu+1)} \\ &= \frac{\nu^2 - \nu^2 + 1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu(\nu+1)} \end{aligned}$$

Ερμηνεύοντας το αποτέλεσμα διαφορετικά, έχουμε αποδείξει ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)\cdot\nu} + \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)} = \frac{\nu}{\nu+1}$$

5.1 Ακολουθίες
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 5.1.9 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

1) $1-\frac{1}{2^\nu}$ 2) $2\nu^2+4\nu-7$

3) $\frac{1}{\nu}\eta\mu\frac{\pi\nu}{2}$ 4) $\frac{2\nu+5}{3^\nu}$

Άσκηση 5.1.10 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

1) $\frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}$ 2) $\frac{\nu^2+1}{2\nu}$

3) $\left(2+\frac{1}{\nu}\right)^2$ 4) $\frac{\nu^2+3}{5-\nu^2}$

Άσκηση 5.1.11 Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

1) $\alpha_\nu=3(\nu-1)+1$ 2) $\alpha_\nu=7\nu+10$

Άσκηση 5.1.12 Τα μερικά αθροίσματα μιας ακολουθίας α_ν δίνονται από τον τύπο

$$S_\nu=\nu^2$$

Να βρείτε τον τύπο της ακολουθίας α_ν.

Άσκηση 5.1.13 Τα μερικά αθροίσματα μιας ακολουθίας α_ν δίνονται από τον τύπο

$$S_\nu=\nu^3$$

Να βρείτε τον τύπο της ακολουθίας α_ν.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

5.2 Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία (α_ν) ονομάζεται αριθμητική πρόοδος, όταν η διαφορά ω οποιουδήποτε όρου της από τον αμέσως προηγούμενο του είναι σταθερή. Ισχύει δηλαδή ο αναδρομικός τύπος

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

Με διαδοχικές εφαρμογές του ανωτέρου αναδρομικού τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε τον (κλειστό) τύπο για τον νιοστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου, ως εξής :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 &= \alpha_3 + \omega \\ &\dots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} + \omega \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} + \omega \end{aligned}$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$$

Εύκολα με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύει κάποιος ότι γενικά ισχύει :

$$\alpha_\nu - \alpha_\kappa = (\nu - \kappa)\,\omega$$

Αριθμητικός μέσος Το ημιάθροισμα δύο αριθμών α και γ ονομάζεται αριθμητικός μέσος των α,γ. Οι παρακάτω ισοδυναμίες αποδεικνύουν ότι : Οι αριθμοί α,β και γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αποδεικνύουμε ξεκινώντας από τον ορισμό

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma, \text{ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου} \\ &\Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta \\ &\Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \\ &\Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \end{aligned}$$

Αθροισμα ν **διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου** Ενα από τα ερωτήματα που μας ενδιαφέρουν στις ακολουθίες, είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της. Στην περίπτωση των αριθμητικών προόδων αυτό γίνεται εύκολο χρησιμοποιώντας το ακόλουθο τέχνασμα :

$$S_\nu = \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) + \cdots + (\alpha_1 + (\nu-2)\omega) + (\alpha_1 + (\nu-1)\omega)$$
$$S_\nu = \alpha_\nu + (\alpha_\nu - \omega) + (\alpha_\nu - 2\omega) + \cdots + (\alpha_\nu - (\nu-2)\omega) + (\alpha_\nu - (\nu-1)\omega)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε για το άθροισμα των ν πρώτων όρων

$$2S_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_1 + \alpha_\nu)$$
$$\Leftrightarrow 2S_\nu = \nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

Οπότε τελικά

$$S_\nu = \frac{\nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)}{2}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$ έχουμε επίσης ότι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega)$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Μια αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε έναν αριθμημένο όρο της και τη διαφορά της. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τον α_6, τότε ο τύπος της αριθμητικής προόδου είναι
$$\alpha_\nu = \alpha_6 + (\nu - 6)\,\omega$$
2. Μια αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε δύο αριθμημένους όρους της. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τους α_8 και α_{15}, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διαφορά από τη σχέση
$$\omega = \frac{\alpha_{15} - \alpha_8}{15 - 8}$$
και χρησιμοποιώντας το πρώτο σχόλιο να γράψουμε το γενικό τύπο ως
$$\alpha_\nu = \alpha_8 + (\nu - 8)\frac{\alpha_{15} - \alpha_8}{15 - 8} \quad \text{ή}$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{15} + (\nu - 15)\frac{\alpha_{15} - \alpha_8}{15 - 8}$$
3. Έστω (α_ν) μια αριθμητική πρόοδος, όπου θεωρούμε κάποιον τυχαίο όρο της α_c ως κέντρο (σημείο αναφοράς). Τότε μπορούμε να διατυπώσουμε : Το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από το κέντρο είναι σταθερό. Συμβολικά, για κάθε φυσικούς $\kappa \le \lambda < c$ θα ισχύει :
$$\alpha_{c-\kappa} + \alpha_{c+\kappa} = \alpha_{c-\lambda} + \alpha_{c+\lambda}$$
4. Οι τύποι
$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$$
$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega)$$

περιέχουν πέντε αγνώστους (α_ν, α_1, ν, ω, S_ν). Αν γνωρίζουμε τρεις από αυτούς τότε οι παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζουν ένα σύστημα με δύο αγνώστους. Επιλύοντας το σύστημα μπορούμε να βρούμε τους υπόλοιπους δύο.

5.2 Αριθμητική πρόοδος
Σωστό ή Λάθος

1	Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$ είναι αριθμητική πρόοδος.	Σ	Λ
2	Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}$ είναι αριθμητική πρόοδος.	Σ	Λ
3	Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = 3 \cdot \nu + 7$ είναι αριθμητική πρόοδος.	Σ	Λ
4	Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $\alpha + \gamma = \beta$	Σ	Λ
5	Η ακολουθία 2,4,8,... είναι αριθμητική πρόοδος	Σ	Λ
6	Η ακολουθία 2,5,8,... είναι αριθμητική πρόοδος	Σ	Λ
7	Οι αριθμοί -4, -1, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου	Σ	Λ
8	Σε μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω ισχύει: $\alpha_4 = \alpha_1 + 4\omega$	Σ	Λ
9	Σε μια αριθμητική πρόοδο $(\alpha\nu)$ ισχύει: $2\alpha_6 = \alpha_4 + \alpha_8$	Σ	Λ
10	Σε μια αριθμητική πρόοδο $(\alpha\nu)$ ισχύει: $\alpha_4 + \alpha_8 = \alpha_2 + \alpha_{10}$	Σ	Λ
11	Σε μια αριθμητική πρόοδο $(\alpha\nu)$ ισχύει: $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}$	Σ	Λ

5.2 Αριθμητική πρόοδος
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 5.2.1 Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu + 2$, $\nu \in N$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και ω.

Λύση 5.2.1 Για κάθε $\nu \in N$ έχουμε:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 3(\nu + 1) + 2 - (3\nu + 2) = 3\nu + 3 + 2 - 3\nu - 2 = 3$$

Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 3$ και $\alpha 1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$.

Άσκηση 5.2.2 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 7, 10, 13, $\cdots$

Λύση 5.2.2

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 7 + (\nu-1)3 = 7 + 3\nu-3 = 3\nu + 4$$

Άσκηση 5.2.3 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 11, 13, 15, $\cdots$

Λύση 5.2.3

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu-1)\omega \\ &= 11 + (\nu-1)2 = 11 + 2\nu-2 = 2\nu + 9\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.4 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 5, 2, -1, $\cdots$

Λύση 5.2.4

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu-1)\omega \\ &= 5 + (\nu-1)(-3) = 5-3\nu + 3 = -3\nu + 8\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.5 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\cdots$

Λύση 5.2.5

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu-1)\omega \\ &= 2 + (\nu-1)\frac{1}{2} = 2 + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\nu}{2} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.6 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου -6, -9, -12, $\cdots$

Λύση 5.2.6

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu-1)\omega \\ &= -6 + (\nu-1)(-3) = -6-3\nu + 3 = -3\nu-3\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.7 Να βρείτε τον α_{15} όρο της αριθμητικής προόδου -2, 3, 8, $\cdots$

Λύση 5.2.7

$$\begin{aligned}\alpha_{15} &= \alpha_1 + (15-1)\omega \\ &= -2 + 14 \cdot 5 = -2 + 70 = 68\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.8 Να βρείτε τον α_{20} όρο της αριθμητικής προόδου 11, 18, 25, $\cdots$

Λύση 5.2.8

$$\begin{aligned} \alpha_{20} &= \alpha_1 + (20-1)\omega \\ &= 11 + 19 \cdot 7 = 11 + 133 = 144 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.9 Σε μια αριθμητική πρόοδο, (α_ν) είναι $\alpha_6 = 12$ και $\alpha_{10} = 16$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση 5.2.9

1. Πρώτος τρόπος, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_6 = 12 \\ \alpha_{10} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + (6-1)\omega = 12 \\ \alpha_1 + (10-1)\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\omega \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\omega \\ 12 - 5\omega + 9\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\omega \\ 4\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5 = 7 \\ \omega = 1 \end{cases}$$

2. Δεύτερος τρόπος, από τον τύπο

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = (10-6)\omega$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{16-12}{10-6} = 1$$

τότε

$$\alpha_6 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1)\omega = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12 - 5\omega = 12 - 5 = 7$$

Άσκηση 5.2.10 Σε μια αριθμητική πρόοδο, (α_ν) είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση 5.2.10

$$\alpha_{12} - \alpha_5 = (12-5)\omega$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{42-14}{12-5} = 4$$

τότε

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 14 - 5 \cdot 4 = 14 - 16 = -2$$

Άσκηση 5.2.11 Σε μια αριθμητική πρόοδο, (α_ν) είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.

Λύση 5.2.11

$$\alpha_7 - \alpha_3 = (7-3)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{32-20}{7-3} = 3$$

τότε

$$\alpha_3 = 20 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 20 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20 - 2\cdot 3 = 14$$

Άσκηση 5.2.12 Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

Λύση 5.2.12

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = 97 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 97\\
&\Leftrightarrow 2 + (\nu-1)5 = 97\\
&\Leftrightarrow (\nu-1)5 = 95\\
&\Leftrightarrow \nu - 1 = 19 \Leftrightarrow \nu = 20
\end{aligned}$$

Επομένως, ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}.

Άσκηση 5.2.13 Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x+1$ και 11 είναι ο $3x-2$.

Λύση 5.2.13 Θα πρέπει

$$\begin{aligned}
&3x-2 = \frac{5x+1+11}{2}\\
&\Leftrightarrow 6x - 4 = 5x + 12\\
&\Leftrightarrow 6x - 5x = 12 + 4 \Leftrightarrow x = 16
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.14 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου

$$7,\quad 9,\quad 11,\quad \cdots$$

Λύση 5.2.14 Η διαφορά της προόδου είναι 2, και από τον τύπο έχω :

$$\begin{aligned}
S_\nu &= \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega) \quad \text{άρα}\\
S_{40} &= \frac{40}{2}(2\cdot 7 + (40-1)2)\\
&= 20(14+78) = 20\cdot 92 = 1840
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.15 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου

$$-7, \quad -2, \quad 3, \quad \cdots$$

Λύση 5.2.15 Η διαφορά της προόδου είναι 5, και από τον τύπο έχω :

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega) \quad \text{άρα}$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2\cdot(-7) + (40-1)5)$$

$$= 20(-14 + 195) = 20\cdot 181 = 3620$$

Άσκηση 5.2.16 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1 + 5 + 9 + \cdots + 197$$

Λύση 5.2.16 Είναι $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 5 - 1 = 4$. Έστω $\alpha_\nu = 197$. Τότε

$$\alpha_1 + (\nu-1)\omega = 197$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 4(\nu-1) = 197$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(\nu-1) = 196$$

$$\Leftrightarrow \quad \nu - 1 = 49 \Leftrightarrow \nu = 50$$

Τότε

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(1 + 197) = 25\cdot 198 = 4950$$

Άσκηση 5.2.17 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$-7 - 10 - 13 - \cdots - 109$$

Λύση 5.2.17 Είναι $\alpha_1 = -7$ και $\omega = -10 - (-7) = -3$. Έστω $\alpha_\nu = -109$. Τότε

$$\alpha_1 + (\nu-1)\omega = -109$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 + (\nu-1)(-3) = -109$$

$$\Leftrightarrow \quad (\nu-1)(-3) = -102$$

$$\Leftrightarrow \quad \nu - 1 = 34 \Leftrightarrow \nu = 35$$

Τότε

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$

$$S_{35} = \frac{35}{2}(-7 - 109) = 35\cdot(-58) = -2030$$

Άσκηση 5.2.18 Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.
Υπόδειξη: Άν α,β θετικοί ακέραιοι όπου $\alpha < \beta$ τότε

$$\text{πολλαπλάσια του } \alpha \leq \beta = \text{ακέραιο μέρος του } \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor$$

Λύση 5.2.18 Έστω S το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200. Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$, $\nu = 200$ και $\alpha_\nu = 200$. Θα είναι τότε :

$$S = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$
$$S = \frac{200}{2}(1 + 200) = 100 \cdot 201 = 20100$$

Έστω σ_4 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 4 από 1 μέχρι 200. Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$, $\nu = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50$ και $\alpha_\nu = 200$. Θα είναι τότε :

$$\sigma_4 = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$
$$\sigma_4 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 25 \cdot 204 = 5100$$

Έστω σ_9 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 9 από 1 μέχρι 200. Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 9$, $\omega = 9$, $\nu = \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor = 22$ και $\alpha_\nu = 198$. Θα είναι τότε :

$$\sigma_9 = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$
$$\sigma_9 = \frac{22}{2}(9 + 198) = 11 \cdot 207 = 2277$$

Για να βρούμε το ζητούμενο άθροισμα πρέπει, από το άθροισμα S να αφαιρέσουμε τα αθροίσματα σ_4 και σ_9. Τότε, όμως, θα έχουμε αφαιρέσει δύο φορές τα κοινά πολλαπλάσια των 4, 9, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 36. Επομένως πρέπει να προσθέσουμε μια φορά το άθροισμα των πολλαπλασίων του 36.

Έστω σ_{36} το άθροισμα των πολλαπλασίων του 36 από 1 μέχρι 200. Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 36$, $\omega = 36$, $\nu = \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor = 5$ και $\alpha_\nu = 180$. Θα είναι τότε :

$$\sigma_{36} = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ άρα}$$
$$\sigma_{36} = \frac{5}{2}(36 + 180) = 5 \cdot 108 = 540$$

Οπότε το ζητούμενο άθροισμα Z είναι

$$Z = S - \sigma_4 - \sigma_9 + \sigma_{36}$$
$$= 20100 - 5100 - 2277 + 540 = 13263$$

Άσκηση 5.2.19 Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από την αριθμητική πρόοδο

$$4, \quad 8, \quad 12, \quad \cdots$$

για να έχουν άθροισμα 180;

Λύση 5.2.19 Είναι $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 8 - 4 = 4$.

$$
\begin{aligned}
& S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega) = 180 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega) = 360 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2 \cdot 4 + (\nu - 1)4) = 360 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\nu(2 + \nu - 1) = 360 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2 + \nu - 1) = 90 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu^2 + \nu - 90 = 0
\end{aligned}
$$

$$\Delta = 1 + 360 = 361 \quad \text{άρα}$$

$$\nu_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} = 9$$

Η ρίζα –10 απορρίπτεται σαν αρνητικός.

Άσκηση 5.2.20 Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \cdots$$

που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά του να ξεπερνάει το 4000;

Λύση 5.2.20 Είναι $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.

Έστω ν το ζητούμενο πλήθος.

$$
\begin{aligned}
& S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega) > 4000 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega) > 8000 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2 \cdot 1 + (\nu - 1)2) > 8000 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu(2 + 2\nu - 2) > 8000 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\nu^2 > 8000 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu^2 > 4000 \\
\Leftrightarrow\quad & \nu > \sqrt{4000} \\
\Leftrightarrow\quad & \nu > 63,\cdots
\end{aligned}
$$

$$\text{άρα } \nu = 64$$

Άσκηση 5.2.21 Έστω η αριθμητική πρόοδος 11, 18, 25, $\cdots$ Να βρείτε τον ν-ιοστό και τον εικοστό όρο της.

Λύση 5.2.21 Επειδή η ακολουθία 11, 18, 25, $\cdots$ είναι αριθμητική πρόοδος έχουμε ότι $\omega = 18 - 11 = 7$ και $\alpha_1 = 11$. Οπότε έχουμε

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 11 + (\nu - 1)7 = 11 + 7\nu - 7 = 7\nu + 4$$
$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20 - 1)\omega = 11 + 19 \cdot 7 = 144$$

Άσκηση 5.2.22 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι: $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α1 και τη διαφορά ω.
β) Να βρεθεί ο όρος α_{23}
γ) Να βρείτε τον όρο της που ισούται με 198
δ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της.

Λύση 5.2.22

α) Γνωρίζω ότι $\alpha_\nu - \alpha_\kappa = (\nu - \kappa)\omega$ και $\alpha_5 = 14$, $\alpha_{12} = 42$ οπότε

$$42 - 14 = (12 - 5)\omega \Leftrightarrow 28 = 7\omega \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ και}$$
$$\alpha_5 - \alpha_1 = (5 - 1)\omega \Leftrightarrow 14 - \alpha_1 = 4\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = 14 - 16 = -2$$

β) Είναι $\alpha_{23} - \alpha_1 = (23 - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{23} = \alpha_1 + 22 \cdot 4 = -2 + 88 = 86$

γ) Θα είναι :

$$\alpha_\kappa - \alpha_1 = (\kappa - 1)\omega \Leftrightarrow 198 - (-2) = (\kappa - 1)4 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 50 \Leftrightarrow \kappa = 51$$

δ) Είναι :

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega) \\ &= \frac{40}{2}(2(-2) + 39 \cdot 4) = 20(-4 + 156) = 3040 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.23 Μεταξύ των αριθμών -3 και 25 να παρεμβληθούν έξι αριθμοί ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση 5.2.23 Θα είναι τότε $\alpha_1 = -3$ και $\alpha_8 = 25$. Οπότε

$$\omega = \frac{25 - (-3)}{8 - 1} = \frac{28}{7} = 4$$

Ετσι η πρόοδος θα δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -3 + (\nu - 1)4 = 4\nu - 7$$

και οι οκτώ πρώτοι όροι είναι : $-3,1,5,9,13,17,21,25$.

Άσκηση 5.2.24 Να βρεθούν τρείς αριθμοί , οι οποίοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα τους είναι 21 και το γινόμενό τους 168.

Λύση 5.2.24 Έστω $x-\omega$, x, $x+\omega$, οι ζητούμενοι αριθμοί. Τότε θα είναι

$$(x-\omega)+x+(x+\omega)=21 \Leftrightarrow 3x=21 \Leftrightarrow x=7$$

Επίσης θα είναι

$$\begin{aligned} & (x-\omega)\cdot x\cdot(x+\omega)=168 \\ \Leftrightarrow\quad & x(x^2-\omega^2)=168 \\ \Leftrightarrow\quad & 49-\omega^2=24 \\ \Leftrightarrow\quad & \omega^2=25 \Leftrightarrow \omega=\pm 5 \end{aligned}$$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 2,7,12 ή 12,7,2.

Άσκηση 5.2.25 Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν), $\nu \in N$ είναι

$$S_\nu = 3\nu^2+4\nu$$

Να δείξετε ότι αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τα α_1 και ω.

Λύση 5.2.25 Βρίσκουμε πρώτα τον τύπο του νιοστού όρου. Είναι

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= S_\nu - S_{\nu-1} \\ &= 3\nu^2+4\nu-(3(\nu-1)^2+4(\nu-1)) \\ &= 3\nu^2+4\nu-3(\nu^2-2\nu+1)-4(\nu-1) \\ &= 3\nu^2+4\nu-3\nu^2+6\nu-3-4\nu+4 = 6\nu+1 \end{aligned}$$

και επειδή $\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}=6\nu+1-6(\nu-1)-1=6$ συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega=6$ και $\alpha_1=7$.

Άσκηση 5.2.26 Να αποδείξετε ότο το άθροισμα των $\nu-\kappa+1$ όρων μιας ακολουθίας (α_ν), $\nu \in N$ δηλαδή $\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}+\cdots+\alpha_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$S_{\kappa\nu} = \frac{\nu-\kappa+1}{2}(\alpha_\kappa+\alpha_\nu)$$

Λύση 5.2.26 Χρησιμοποιώντας το τέχνασμα της θεωρίας, βρίσκω

$$\begin{aligned} S_{\kappa\nu} &= \alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}+\cdots+\alpha_\nu \\ S_{\kappa\nu} &= \alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\cdots+\alpha_\kappa \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τότε κατα μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2S_{\kappa\nu} &= (\alpha_\kappa+\alpha_\nu)+(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\nu-1})+\cdots+(\alpha_\nu+\alpha_\kappa) \\ &= (\nu-\kappa+1)(\alpha_\kappa+\alpha_\nu) \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.27 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $α_1 = -9$ και διαφορά $ω = 2$. Να βρείτε το άθροισμα $S = α_{12} + α_{13} + \cdots + α_{21}$

Λύση 5.2.27 Υπολογίζουμε διαδοχικά

$$α_{12} = α_1 + 11ω = -9 + 11 \cdot 2 = 13$$

$$α_{21} = α_1 + 20ω = -9 + 20 \cdot 2 = 31$$

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned} 2S_{12-21} &= (21 - 12 + 1)(13 + 31) \\ &= 440 \end{aligned}$$

Δηλαδή το ζητούμενο άθροισμα είναι $S_{12-21} = 220$.

Άσκηση 5.2.28 Σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $α_1 = 2$, ο τελευταίος 149 και το άθροισμα όλων των όρων 3775. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των όρων

β) Τη διαφορά ω

γ) Το άθροισμα $S = α_2 + α_6 + α_{10} + \cdots + α_{38}$

Λύση 5.2.28

α) Από τον τύπο $2S_ν = ν(α_1 + α_ν)$ βρίσκω

$$2 \cdot 3775 = ν(2 + 149) \Leftrightarrow ν = \frac{7550}{151} = 50$$

β) Από τον τύπο $α_ν - α_1 = (ν - 1)ω$ βρίσκω

$$(ν - 1)ω = 147 \Leftrightarrow ω = \frac{147}{49} = 3$$

γ) Η ακολουθία $α_2, α_6, α_{10}, ..., α_{38}$ είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $β_1 = α_2 = α_1 + ω = 5$ και διαφορά $ω_1 = 4ω = 12$. Το πλήθος των όρων που θέλουμε είναι $10 = 1 + (38 - 2)|4$. Οπότε βρίσκω για το άθροισμα

$$\begin{aligned} S = α_2 + α_6 + α_{10} + \cdots + α_{38} &= \frac{10}{2}(2 \cdot 5 + (10 - 1)12) \\ &= 5(10 + 108) = 590 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.29 Να λυθεί η εξίσωση:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + α_ν = 155$$

Λύση 5.2.29 Είναι $α_1 = 2, ω = 3$ και γνωρίζω ότι ισχύουν

$$\begin{cases} ω = \dfrac{α_ν - α_1}{ν - 1} \\ 2S_ν = ν(α_1 + α_ν) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{α_ν - 2}{ν - 1} \\ 2 \cdot 155 = ν(2 + α_ν) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α_ν = 3(ν - 1) + 2 \\ 310 = ν(2 + 3(ν - 1) + 2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} α_ν = 3(ν - 1) + 2 \\ 3ν^2 + ν = 310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α_ν = 3(ν - 1) + 2 \\ ν = 10 \text{ ή } ν = -\frac{31}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} α_ν = 29 \\ ν = 10 \end{cases}$$

5.2 Αριθμητική πρόοδος
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 5.2.30 Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = 2\nu + 1,\ \nu \in N$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και ω.

Άσκηση 5.2.31 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου

$$-8,\ -15,\ -22,\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.32 Να βρείτε το ν-οστό όρο της αριθμητικής προόδου

$$5,\ 10,\ 15,\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.33 Να βρείτε τον α_{30} όρο της αριθμητικής προόδου

$$4,\ 15,\ 26,\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.34 Να βρείτε τον α_{35} όρο της αριθμητικής προόδου

$$17,\ 25,\ 33,\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.35 Να βρείτε τον α_{50} όρο της αριθμητικής προόδου

$$1,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.36 Να βρείτε τον α_{47} όρο της αριθμητικής προόδου

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ 2,\ \cdots$$

Άσκηση 5.2.37 Σε μια αριθμητική πρόοδο, (α_ν) είναι $\alpha_5 = -5$ και $\alpha_{15} = -2$. Να βρείτε τον α_{50} όρο της προόδου.

Άσκηση 5.2.38 Σε μια αριθμητική πρόοδο, (α_ν) είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$. Να βρείτε τον α_{18} όρο της προόδου.

Άσκηση 5.2.39 Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;

Άσκηση 5.2.40 Αν δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δύο αυτούς αριθμούς.

Άσκηση 5.2.41 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου

$$0, 2, 4, \cdots$$

Άσκηση 5.2.42 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου

$$6, 10, 14, \cdots$$

Άσκηση 5.2.43 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων της αριθμητικής προόδου

$$2, -1, -4, \cdots$$

Άσκηση 5.2.44 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων της αριθμητικής προόδου

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \cdots$$

Άσκηση 5.2.45 Να βρείτε το άθροισμα
i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών.
ii) των πρώτων 300 άρτιων αριθμών.
iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

Άσκηση 5.2.46 Να βρείτε το άθροισμα
i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 99.
ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

Άσκηση 5.2.47 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας

$$\alpha_\nu = 5\nu - 4$$

Άσκηση 5.2.48 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας

$$\alpha_\nu = -5\nu - 3$$

Άσκηση 5.2.49 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$9 + 12 + 15 + \cdots + 90$$

Άσκηση 5.2.50 Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από την αριθμητική πρόοδο

$$4, \quad 10, \quad 15, \quad \cdots$$

για να έχουν άθροισμα 180;

Άσκηση 5.2.51 Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_6 = 8$ και $\alpha_4 = 4$.

Άσκηση 5.2.52 Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Παρεμβολή όρων]**

Άσκηση 5.2.53 Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δύο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

Άσκηση 5.2.54 Ένα ρολόϊ χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24ωρο;

Άσκηση 5.2.55 Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

Άσκηση 5.2.56 Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

Άσκηση 5.2.57 Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$
α). Να βρείτε τη διαφορά ω.
β). Να βρείτε τον 16^0 όρο της προόδου.
γ). Να βρείτε τον όρο της που ισούται με 246
δ). Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της.

Άσκηση 5.2.58 Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $S_\nu = 2\nu - 9\nu^2$. Να δειχθεί ότι η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και ω.

Άσκηση 5.2.59 Να δείξετε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο ισχύει:

$$\alpha_1 - 4\alpha_2 + 6\alpha_3 - 4\alpha_4 + \alpha_5 = 0$$

Άσκηση 5.2.60 Σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 2 και ο πέμπτος όρος είναι 14. Πόσους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε ώστε να έχουν άθροισμα 77;

Άσκηση 5.2.61 Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι $\alpha_\kappa = 5\kappa$ και $\alpha_\lambda = 5\lambda$, όπου $\kappa \neq \lambda$. Να δείξετε ότι η διαφορά της (α_ν) είναι $\omega = 5$.

Άσκηση 5.2.62 Ενός οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ οι αριθμοί εφΑ, εφΒ, εφΓ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι εφΑ εφΓ = 3

Άσκηση 5.2.63 Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 4 και το γινόμενό τους 105.

Άσκηση 5.2.64 Έστω ότι οι αριθμοί $\alpha = -x^3 - 6$, $\beta = x^2$, $\gamma = -3x$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε το x.
β) Αν ο β είναι ο 5ος όρος να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

Άσκηση 5.2.65 Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα:
α) Των διψήφιων περιττών αριθμών
β) Των διψήφιων άρτιων αριθμών
γ) Των διψήφιων φυσικών αριθμών

Άσκηση 5.2.66 Μεταξύ των αριθμών 3 και 25 να βρείτε άλλους 10 φυσικούς αριθμούς ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 5.2.67 Σε μια αριθμητική πρόοδο ο 2ος και ο 8ος όρος διαφέρουν κατά 24, ενώ το άθροισμα του 12ου και του 4ου είναι 70.
α) Να βρείτε την πρόοδο αν είναι γνωστό ότι η διαφορά τους είναι θετική
β) Ποιο είναι το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του 8ου και του 25ου όρου της;

Άσκηση 5.2.68 Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου , να δείξετε ότι και οι αριθμοί

$$x = \alpha^2 - \beta\gamma, \quad y = \beta^2 - \alpha\gamma, \quad z = \gamma^2 - \alpha\beta$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 5.2.69 Μιας ακολουθίας, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu = 3\nu^2 + \nu$.
α) Να βρείτε το άθροισμα των $(\nu - 1)$ πρώτων όρων της
β) Να βρείτε το νιοστό της όρο.
γ) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$
δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.
ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100.

Άσκηση 5.2.70 Πόσους αριθμητικούς ενδιαμέσους πρέπει να παρεμβάλουμε ανάμεσα στους 1 και 19 ώστε ο λόγος του δεύτερου ενδιάμεσου προς τον τελευταίο ενδιάμεσο να είναι ίσος με 1|6.

Άσκηση 5.2.71 Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι με τους 3,5,8. Αν αυξηθεί ο 2ος κατά 1 τότε γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τους τρεις αριθμούς.

Άσκηση 5.2.72 Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+29)=165:$$

Άσκηση 5.2.73

α) Αν α_1, α_2, ... α_ν όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι

$$\alpha_1+\alpha_\nu=\alpha_2+\alpha_{\nu-1}=\alpha_3+\alpha_{\nu-2}$$

β) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου αν ξέρουμε ότι ισχύει:

$$\alpha_2+\alpha_5+\alpha_{10}+\alpha_{21}+\alpha_{26}+\alpha_{29}=30$$

Άσκηση 5.2.74 Έστω αριθμητική πρόοδος (α_ν), για την οποία δίνεται ο όρος $\alpha_6=15$ και το άθροισμα των πρώτων οκτώ όρων της $S_8=96$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu=2\nu+3$

β) Να αποδείξετε ότι, αν S_ν είναι το άθροισμα των πρώτων ν όρων της προόδου τότε ισχύει:

$$4S_\nu=16\nu+(\alpha_\nu-3)^2$$

γ) Αν ισχύει $S_\nu<9\alpha_\nu-75$, να βρεθεί ο ν.

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Η Γεωμετρική πρόοδος είναι ένας τύπος ακολουθίας, η οποία θα λέγαμε ότι αποτελεί το "πολλαπλασιαστικό ανάλογο" μιας Αριθμητικής προόδου. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε :

Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό λ. Τον αριθμό αυτό λ, τον λέμε λόγο της προόδου.

Για την Γεωμετρική πρόοδο λοιπόν ισχύει δηλαδή ο αναδρομικός τύπος

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Με διαδοχικές εφαρμογές του ανωτέρου αναδρομικού τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε τον (κλειστό) τύπο για τον νιοστό όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου, ως εξής :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 \cdot \lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2 \cdot \lambda \\ \alpha_4 &= \alpha_3 \cdot \lambda \\ &\dots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda \end{aligned}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη και διαγράφοντας, βρίσκουμε :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Εύκολα με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύει κάποιος ότι γενικά ισχύει :

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\kappa} = \cdot\lambda^{\nu-\kappa}$$

Γεωμετρικός μέσος Η ρίζα δύο αριθμών α και γ ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α,γ. Οι παρακάτω ισοδυναμίες αποδεικνύουν ότι : Οι αριθμοί α,β και γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$$

Αποδεικνύουμε ξεκινώντας από τον ορισμό

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma, \text{ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \\ &\Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma \\ &\Leftrightarrow \beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma} \end{aligned}$$

Αθροισμα ν **διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου** Για να βρούμε το άθροισμα ν διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου εφαρμόζουμε το ανάλογο τέχνασμα, όπως κάναμε στις αριθμητικές προόδους. Έχουμε λοιπόν :

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \dots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-2} + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$
$$\lambda \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda^3 + \dots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} + \alpha_1 \cdot \lambda^\nu$$

Αφαιρώντας την πρώτη από τη δεύτερη, παίρνουμε για το άθροισμα των ν πρώτων όρων

$$\lambda \cdot S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου $\alpha_{\nu+1} = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu$ έχουμε επίσης ότι

$$S_\nu = \frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_1}{\lambda - 1}$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Μια γεωμετρική πρόοδος ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε έναν αριθμημένο όρο της και το λόγο της. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τον α_6, τότε ο τύπος της γεωμετρικής προόδου είναι
$$\alpha_\nu = \alpha_6 \cdot \lambda^{\nu-6}$$

2. Μια γεωμετρική πρόοδος ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε δύο αριθμημένους όρους της. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τους α_8 και α_{15}, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το λόγο λ από τη σχέση
$$\alpha_{15} = \alpha_8 \cdot \lambda^{15-8} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[15-8]{\frac{\alpha_{15}}{\alpha_8}} = \left(\frac{\alpha_{15}}{\alpha_8}\right)^{\frac{1}{15-8}}$$
και χρησιμοποιώντας το πρώτο σχόλιο να γράψουμε το γενικό τύπο ως
$$\alpha_\nu = \alpha_8 \cdot \lambda^{\nu-8} = \alpha_8 \cdot \left(\frac{\alpha_{15}}{\alpha_8}\right)^{\frac{\nu-8}{15-8}} \quad \text{ή}$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{15} \cdot \lambda^{\nu-15} = \alpha_{15} \cdot \left(\frac{\alpha_{15}}{\alpha_8}\right)^{\frac{\nu-15}{15-8}}$$

Προσοχή : Όταν ο εκθέτης του λ είναι άρτιος, τότε προσδιορίζονται δύο πραγματικές ρίζες και επομένως δύο γεωμετρικές πρόοδοι.

3. Έστω (α_ν) μια γεωμετρική πρόοδος, όπου θεωρούμε κάποιον τυχαίο όρο της α_c ως κέντρο (σημείο αναφοράς). Τότε μπορούμε να διατυπώσουμε : Το γινόμενο των όρων που ισαπέχουν από το κέντρο είναι σταθερό. Συμβολικά, για κάθε φυσικούς $\kappa \leq \lambda < c$ θα ισχύει :

$$\alpha_{c-\kappa} \cdot \alpha_{c+\kappa} = \alpha_{c-\lambda} \cdot \alpha_{c+\lambda}$$

4. Οι τύποι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$
$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

περιέχουν πέντε αγνώστους (α_ν, α_1, ν, λ, S_ν). Αν γνωρίζουμε τρεις από αυτούς τότε οι παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζουν ένα σύστημα με δύο αγνώστους. Επιλύοντας το σύστημα μπορούμε να βρούμε τους υπόλοιπους δύο.

5.3 Γεωμετρική πρόοδος
Σωστό ή Λάθος

1	Ο νιοστός όρος α_ν μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^\nu$ . . .	**Σ**	**Λ**
2	Ο λόγος μια γεωμετρικής προόδου μπορεί να είναι 0.	**Σ**	**Λ**
3	Αν α,β,γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$	**Σ**	**Λ**
4	Αν ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 1 τότε είναι: $S_\nu = \nu\alpha_1$	**Σ**	**Λ**
5	Η ακολουθία (αν) με $\alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος	**Σ**	**Λ**
6	Αν ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$ τότε οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.	**Σ**	**Λ**
7	Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών -4 και -16 είναι ο αριθμός 8	**Σ**	**Λ**
8	Αν οι αριθμοί α,β,γ,δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$	**Σ**	**Λ**
9	Η γεωμετρική πρόοδος 2,6,18,... έχει τύπο $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^{\nu-1}$	**Σ**	**Λ**

5.3 Γεωμετρική πρόοδος
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 5.3.1 Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας (α_ν) είναι:

$$\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$$

Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και λ.

Λύση 5.3.1 Έχουμε

$$\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{3 \cdot 2^\nu}{3 \cdot 2^{\nu-1}} = 2^{\nu-\nu+1} = 2$$

Άρα η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = 2$ και $\alpha_1 = 3$.

Άσκηση 5.3.2 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου $3, 6, 12, \cdots$

Λύση 5.3.2 Είναι

$$\lambda = \frac{6}{3} \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 3 \cdot 2^{\nu-1}$$

Άσκηση 5.3.3 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

Λύση 5.3.3 Είναι

$$\lambda = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}$$

Άσκηση 5.3.4 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου $16, 8, 4, \cdots$

Λύση 5.3.4 Είναι

$$\lambda = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4 \cdot 2^{1-\nu} = 2^{5-\nu}$$

Άσκηση 5.3.5 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου 18, 6, 2, $\cdots$

Λύση 5.3.5 Είναι

$$\lambda = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 18\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2\cdot 3^2\cdot 3^{1-\nu} = 2\cdot 3^{3-\nu}$$

Άσκηση 5.3.6 Να βρείτε τον α_9 όρο της γεωμετρκής προόδου $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \cdots$

Λύση 5.3.6 Είναι

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \quad \text{και} \quad \alpha_9 = \alpha_1\lambda^{9-1} = \left(\frac{1}{4}\right)2^8 = 2^{-2}\cdot 2^8 = 2^6$$

Άσκηση 5.3.7 Να βρείτε τον α_8 όρο της γεωμετρκής προόδου 729, 243, $\cdots$

Λύση 5.3.7 Είναι

$$\lambda = \frac{243}{729} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \alpha_8 = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 729\left(\frac{1}{3}\right)8-1 = 3^6\cdot 3^{-7} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 5.3.8 Να βρείτε τον 1ο όρο της γεωμετρκής προόδου της οποίας ο 5ος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

Λύση 5.3.8 Είναι

$$\begin{aligned} & \alpha_5 = \alpha_1\lambda^{5-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{32}{3} = \alpha_1 2^4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.9 Να βρείτε τον 1ο όρο της γεωμετρκής προόδου της οποίας ο 4ος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$.

Λύση 5.3.9 Είναι

$$\begin{aligned} & \alpha_4 = \alpha_1\lambda^{4-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{27}{128} = \alpha_1\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = \frac{3^3}{2^7}\cdot\frac{(2^2)^3}{3^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.10 Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο 3ος όρος είναι 12 και ο 6ος όρος είναι 96.

Λύση 5.3.10 Θα είναι

$$\frac{\alpha_6}{\alpha_3} = \lambda^{6-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 = \frac{96}{12} = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Άσκηση 5.3.11 Να βρείτε τον α_{14} όρο μιας γεωμετρκής προόδου για την οποία

$$\alpha_4 = 125 \quad \text{και} \quad \alpha_{10} = \frac{125}{64}$$

Λύση 5.3.11 Θα είναι

$$\frac{\alpha_{10}}{\alpha_4} = \lambda^{10-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^6 = \frac{\frac{125}{64}}{125} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

α) Για $\lambda = \frac{1}{2}$ ορίζεται γεωμετρική πρόοδος για την οποία

$$\alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 125$$

$$\frac{\alpha_1}{8} = 125 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1000$$

τότε

$$\alpha_{14} = \alpha_1\lambda^{13} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$$

β) Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ ορίζεται γεωμετρική πρόοδος για την οποία

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 125$$

$$-\frac{\alpha_1}{8} = 125 \Leftrightarrow \alpha_1 = -1000$$

τότε

$$\alpha_{14} = \alpha_1\lambda^{13} = -1000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{13} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$$

Άσκηση 5.3.12 Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, $\cdots$ Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

Λύση 5.3.12 Είναι $\lambda = \frac{6}{3} = 2$ και $\alpha_\nu = 768$. Αρα

$$\begin{aligned} & \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 768 \\ \Leftrightarrow\ & 3\cdot 2^{\nu-1} = 768 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{\nu-1} = 256 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{\nu-1} = 2^8 \\ \Leftrightarrow\ & \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.13 Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

Λύση 5.3.13

$$\mu = \sqrt{5\cdot 20} = \sqrt{100} = 10$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{1} = 1$$

Άσκηση 5.3.14 Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί x–4, x+1, x–19 να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση 5.3.14 Θα πρέπει

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x-4} = \frac{x-19}{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2 = (x-4)(x-19) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 = x^2 - 19x - 4x + 76 \\ \Leftrightarrow\ & 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.15 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου 3, 9, 27, $\cdots$

Λύση 5.3.15 Είναι $\lambda = \frac{9}{3} = 3$. Τότε

$$\begin{aligned} S_{10} &= \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} \\ &= 3\frac{3^{10}-1}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{10}-1) \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.16 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$2+8+32+\cdots+8192$$

Λύση 5.3.16 Είναι $\lambda=4$, $\alpha_1=2$ και $\alpha_\nu=8192$. Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha_{\nu+1}-\alpha_1}{\lambda-1} \\ &= \frac{8192\cdot 4-2}{4-1} \\ &= \frac{32646}{3}=10922 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.17 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$4+2+1+\cdots+\frac{1}{512}$$

Λύση 5.3.17 Είναι $\lambda=\frac{1}{2}$, $\alpha_1=4$ και $\alpha_\nu=\frac{1}{512}$. Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha_{\nu+1}-\alpha_1}{\lambda-1} \\ &= \frac{\frac{1}{512}\cdot\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{\frac{1}{1024}-4}{-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{4095}{1024}}{-\frac{1}{2}}=\frac{8190}{1024} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.3.18 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2+\alpha_6=34$ και $\alpha_3+\alpha_7=68$.

Λύση 5.3.18

$$\alpha_2+\alpha_6=34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda+\alpha_1\lambda^5=34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda(1+\lambda^4)=34 \quad (1)$$
$$\alpha_3+\alpha_7=68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2+\alpha_1\lambda^6=68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2(1+\lambda^4)=68 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \lambda=2$$
$$(1) \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 2(1+2^4)=34 \Leftrightarrow 2\alpha_1\cdot 17=34 \Leftrightarrow \alpha_1=1$$
$$S_{10}=\alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1$$

Άσκηση 5.3.19 Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας $(\alpha_\nu), \nu \in N$ είναι:

$$S_\nu = 8 - \frac{1}{2^\nu}$$

Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και λ.

Λύση 5.3.19 Βρίσκουμε πρώτα τον α_ν. Είναι

$$\begin{aligned}\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} &= 8 - \frac{1}{2^\nu} - 8 + \frac{1}{2^{\nu-1}} \\ &= \frac{1}{2^{\nu-1}} - \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^\nu}\end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$\lambda = \frac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha^\nu} = \frac{2^{-(\nu+1)}}{2^{-\nu}} = \frac{1}{2}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 5.3.20 Έστω η γεωμετρική πρόοδος :

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$$

α) Να βρείτε τον νιοστό όρο.
β) Να βρείτε τον α_9.
γ) Ποιος όρος ισούται με 256;

Λύση 5.3.20 Έχουμε $\lambda = 2$ και $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ οπότε

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4}2^{\nu-1} = 2^{\nu-3} \quad \text{και}$$

$$\alpha_9 = 2^{9-3} = 2^6 = 64$$

Για το γ), έστω ότι $\alpha_\nu = 256$, θα είναι τότε

$$256 = 2^{\nu-3} \Leftrightarrow 2^8 = 2^{\nu-3} \Leftrightarrow \nu - 3 = 8 \Leftrightarrow \nu = 11$$

Άσκηση 5.3.21 Σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι :

$$\alpha_2 = \frac{8}{3} \quad \text{και} \quad \alpha_5 = \frac{64}{81}$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ
β) Να βρείτε το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της.

Λύση 5.3.21 Γνωρίζουμε δύο όρους οπότε βρίσκουμε πρώτα το λ. Ισχύει

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = \lambda^{5-2} \Leftrightarrow \frac{\frac{64}{81}}{\frac{8}{3}} = \lambda^3 \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

και επειδή

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda^{2-1} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \alpha_1 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$$

Τέλος, έχω για το S_8

$$S_8 = \alpha_1 \frac{\lambda^8 - 1}{\lambda - 1} = 4\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{75660}{6561}$$

Άσκηση 5.3.22 Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι λ = 2, $\alpha_\nu = 192$, $S_\nu = 381$ να βρείτε :

α) Τον πρώτο όρο α1.

β) Το πλήθος των όρων.

γ) Το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + :\alpha_{61}$

Λύση 5.3.22 Επειδή $\alpha_\nu = 192$ είναι $\alpha_{\nu+1} = 384$ έτσι έχουμε από τον τύπο

$$S_\nu = \frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow 381 = \frac{384 - \alpha_1}{2 - 1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 3$$

Επίσης

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow 381 = 3\frac{2^\nu - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow 2^\nu - 1 = 127 \Leftrightarrow 2^\nu = 128 \Leftrightarrow \nu = 7$$

Για το τρίτο ερώτημα παρατηρούμε ότι η ακολουθία των όρων $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος, με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ^2. Αυτό που ζητείται είναι να βρούμε το άθροισμα των 31 πρώτων όρων. Χρησιμοποιώντας τον τύπο έχουμε

$$S_{31} = 3\frac{4^{31} - 1}{4 - 1} = 4^{31} - 1$$

Άσκηση 5.3.23 Να βρεθούν τρείς διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

Λύση 5.3.23 Έστω $\frac{x}{\lambda}$, x, xλ οι ζητούμενοι αριθμοί. Θα είναι τότε

(1) $\frac{x}{\lambda} + x + x\lambda = 14$ και

(2) $\frac{x}{\lambda} \cdot x \cdot x\lambda = 64$

Από την (2) έχω

$$x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

έτσι παίρνω από την (1)

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\lambda} + 4 + 4\lambda = 14 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 14\lambda \\ \Leftrightarrow \quad & 4\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda = 2 \quad ή \quad \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Για $x = 4$ και $\lambda = 2$ οι αριθμοί είναι: 2, 4, 8
- Για $x = 4$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι: 8, 4, 2.

Άσκηση 5.3.24 Μεταξύ των αριθμών 3 και 384 να βρεθούν έξι ακόμη αριθμοί ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Λύση 5.3.24 Θεωρώ την ακολουθία

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 = 384$$

Για αυτήν την ακολουθία θα ισχύει

$$\alpha_8 = \alpha_1 \cdot \lambda^7 \Leftrightarrow 384 = 3 \cdot \lambda^7 \Leftrightarrow \lambda^7 = 128 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Δηλαδή οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Άσκηση 5.3.25 Πόσους όρους πρέπει να πάρουμε από τη γεωμετρική πρόοδο

$$2, 4, 8, 16, \cdots$$

ώστε το άθροισμά τους S να είναι 254;

Λύση 5.3.25 Η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και λόγο $\lambda = 2$. Έστω κ το πλήθος των όρων. Τότε:

$$\begin{aligned} & S_\kappa = \alpha_1 \frac{\lambda^\kappa - 1}{\lambda - 1} \\ \Leftrightarrow \quad & 254 = 2\frac{2^\kappa - 1}{2 - 1} \\ \Leftrightarrow \quad & 127 = 2^\kappa - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^\kappa = 128 \Leftrightarrow \kappa = 7 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να πάρουμε 7 όρους.

Άσκηση 5.3.26 Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) είναι

$$α_1 = \frac{4}{3}, \quad \text{και} \quad λ = 2$$

Να βρείτε τον μεγαλύτερο όρο της προόδου που δεν υπερβαίνει τον αριθμό 685.

Λύση 5.3.26 Θα πρέπει

$$\begin{aligned} & α_κ = α_1 \cdot λ^{κ-1} < 685 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4}{3}2^{κ-1} < 685 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{κ+1} < 2055 \quad \text{αρα} \\ & κ + 1 = 11 \Leftrightarrow κ = 10 \end{aligned}$$

Επομένως μεγαλύτερος όρος είναι ο δέκατος.

Άσκηση 5.3.27 Να υπολογίσετε το γινόμενο των ν πρώτων όρων για τη γεωμετρική πρόοδο: 1,3,9,27,...

Λύση 5.3.27 Η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $α_1 = 1$ και λόγο $λ = 3$. Επομένως ο νιοστός όρος της είναι:

$$α_ν = α_1 \cdot λ^{ν-1} = 3^{ν-1}$$

Το γινόμενο που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι:

$$\begin{aligned} Γ &= 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdots 3^{ν-1} \\ &= 3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdots 3^{ν-1} \\ &= 3^{1+2+3+\cdots+(ν-1)} \\ &= 3^{\frac{ν(ν-1)}{2}} \end{aligned}$$

Γιατι ο εκθέτης είναι άθροισμα (ν – 1) όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1 = 1$ και διαφορά $ω = 1$.

Άσκηση 5.3.28 Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

Λύση 5.3.28 Έστω $α_ν$ το ύψος, στο οποίο φθάνει η μπάλα ση ν-οστή αναπήδηση. Τότε

$$α_{ν+1} = \frac{1}{3}α_ν$$

Άρα πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $α_1 = \frac{60}{3} = 20$ και $λ = \frac{1}{3}$. Οπότε :

$$α_4 = α_1λ^{4-1} = 20\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}μ$$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 5.3.29 Ο νιοστός όρος ακολουθίας (α_ν) είναι:

$$\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$$

Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθούν τα α_1 και λ.

Άσκηση 5.3.30 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου

$$\frac{2}{3}, 2, 6, \cdots$$

Άσκηση 5.3.31 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου

$$9, 27, 81, \cdots$$

Άσκηση 5.3.32 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου

$$1, 0{,}4, 0{,}16, \cdots$$

Άσκηση 5.3.33 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου

$$-2, 4, -8, \cdots$$

Άσκηση 5.3.34 Να βρείτε το ν-οστό όρο της γεωμετρκής προόδου

$$-3, 9, -27, \cdots$$

Άσκηση 5.3.35 Να βρείτε τον α_7 όρο της γεωμετρκής προόδου

$$2, 6, 18, \cdots$$

Άσκηση 5.3.36 Να βρείτε τον $α_{10}$ όρο της γεωμετρκής προόδου

$$1,\ -2,\ 4,\ \cdots$$

Άσκηση 5.3.37 Να βρείτε τον $α_9$ όρο της γεωμετρκής προόδου

$$\frac{8}{27},\ \frac{4}{9},\ \frac{2}{3},\ \cdots$$

Άσκηση 5.3.38 Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $2^{ος}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{ος}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$.

Άσκηση 5.3.39 Να βρείτε τον $α_{21}$ όρο μιας γεωμετρκής προόδου για την οποία

$$α_{13} = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad α_{23} = 32\sqrt{2}$$

Άσκηση 5.3.40 Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16, $\cdots$, που υπερβαίνει το 2000.

Άσκηση 5.3.41 Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32, $\cdots$, που είναι μικρότερος του 0,25.

Άσκηση 5.3.42 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου $1, 2, 4, \cdots$

Άσκηση 5.3.43 Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της γεωμετρικής προόδου $-4, 8, -16, \cdots$

Άσκηση 5.3.44 Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1 + (-2) + 4 + \cdots + 256$$

Άσκηση 5.3.45 Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $α_ν = \frac{2^ν}{3^{ν+1}}$ Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους $α_1$ και λ.

Άσκηση 5.3.46 Το άθροισμα των ν πρώτων όρων ακολουθίας είναι:

$$S_\nu = 2(3^\nu - 1)$$

α) Να βρεθεί το α_ν
β) Να αποδείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο α_1 και ο λ.
γ) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

Άσκηση 5.3.47 Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\nu = \frac{1}{64}, \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Να βρείτε το πλήθος ν.

Άσκηση 5.3.48 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο (α_ν) στην οποία ισχύουν:

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 16 \quad \text{και} \quad \alpha_5 - \alpha_3 = 144$$

Άσκηση 5.3.49 Έστω η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με

$$\alpha_3 = x + 9, \quad \alpha_4 = -2x, \quad \alpha_5 = x, \quad x \neq 0$$

α) Να βρείτε το x.
β) Να βρείτε τον όρο που ισούται με $-\frac{3}{8}$.

Άσκηση 5.3.50 Σε γεωμετρική πρόοδο είναι

$$\alpha_7 = 640 \quad \text{και} \quad \frac{\alpha_{10}}{\alpha_5} = 32$$

α) Να βρεθεί ο α_1 και ο λ.
β) Να βρεθεί το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της.

Άσκηση 5.3.51 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο για την οποία

$$S_4 = 30 \quad \text{και}$$
$$\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$$

Άσκηση 5.3.52 Σε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

$$S_6 = 9S_3$$

Να βρείτε το λόγο της προόδου.

Άσκηση 5.3.53 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο (α_ν),αν

$$S_3 = 26 \quad \text{και} \quad \alpha_4 - \alpha_1 = 52$$

Άσκηση 5.3.54 Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 5.3.55 Ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 3, 27, 99 ώστε οι αριθμοί που θα προκύψουν να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

Άσκηση 5.3.56 Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να δείξετε ότι:

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2) = (xy+yz)^2$$

Άσκηση 5.3.57 Να αποδείξετε ότι αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

Άσκηση 5.3.58 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο α_2 είναι γεωμετρικός μέσος των α_1 και α_4 να δείξετε ότι ο α_6 είναι γεωμετρικός μέσος των α_4 και α_9

Άσκηση 5.3.59 Σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \quad \text{και} \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 36$$

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ.
β) Να βρείτε το άθροισμα των όρων της προόδου που είναι ανάμεσα στον 5ο και τον 20ο όρο.

Άσκηση 5.3.60 Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

Άσκηση 5.3.61 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι $3 + \sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3 + \sqrt{3})$.

Άσκηση 5.3.62 Μεταξύ των ριζών ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης

$$x^2 - 51x + 144 = 0 \quad \text{με} \quad \rho_1 < \rho_2$$

να βρεθούν τρεις ακόμη αριθμοί, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 5.3.63 Να λυθεί η εξίσωση:

$$5 \cdot 5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdots 5^{2^x} = 5^{255}$$

Άσκηση 5.3.64 Δίνεται η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$$

α) Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος που έχει σαν πρώτο όρο τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης και σαν λόγο τη μεγαλύτερη ρίζα.
β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων όρων της α_ν ως ν πάρουμε το τριπλάσιο της τρίτης ρίζας.

Άσκηση 5.3.65 Αν οι αριθμοί

$$\frac{1}{\beta - \gamma}, \quad \frac{1}{2\beta}, \quad \frac{1}{\beta - \alpha}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου , να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 5.3.66 Αν ένα άτομο που γνωρίζει ένα μυστικό το πει σε 2 φίλους του την πρώτη μέρα οι οποίοι στη συνέχεια το πουν σε 2 φίλους τους ο καθένας την επόμενη μέρα κ.ο.κ, πόσοι θα μάθουν το μυστικό μετά από 10 ημέρες;

Άσκηση 5.3.67 Μια κοινωνία βακτηριδίων υποδιπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 8192 βακτηρίδια να βρείτε πόσα θα υπάρχουν μετά από 11 ώρες.

Άσκηση 5.3.68 Κάποιος ξεκίνησε να διαβάζει ένα βιβλίο την Κυριακή και το τελείωσε σε πέντε μέρες, την Πέμπτη. Την Κυριακή και την Δευτέρα διάβασε 10 σελίδες την ημέρα. Την Τρίτη 20 σελίδες και κάθε επόμενη μέρα τα $\frac{2}{5}$ της προηγούμενης μέρας.

α) Πόσες σελίδες διάβασε την Πέμπτη;

β) Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;

Άσκηση 5.3.69 Είναι γνωστό ότι τα μήκη των χορδών που ορίζονται από τα τάστα μιας κιθάρας, αποτελούν γεωμετρικό πρόοδο με λόγο λ. Τοποθετούνται δε, με τέτοιο τρόπο ώστε το 12^{o} τάστο να συμπίπτει με το μέσον της χορδής. (Σύμφωνα με την ορολογία μας έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{13} = \frac{1}{2}$).

Να βρείτε :

α) Τον λόγο λ.

β) Τους όρους α_8,α_6 και α_4 και να τους συγκρίνετε με τα κλάσματα $\frac{2}{3}$,$\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{5}$.

Άσκηση 5.3.70 Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και τον γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν). Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια;

Άσκηση 5.3.71 Σύμφωνα με την παράδοση αυτή όταν κάποτε ο ηγεμόνας της περιοχής που ζούσε ο βραχμάνος Σίσσα, κάλεσε αυτόν για να επιδείξει το παιγνίδι που είχε εφεύρει, τόσο πολύ γοητεύτηκε απ΄ αυτό που ρώτησε τον Σίσσα τι θα ήθελε ως ανταμοιβή. Τότε ο σοφός εκείνος ζήτησε τόσους κόκκους σιτάρι όσους θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας βάζοντας στο πρώτο ένα κόκκο, στο δεύτερο δύο, στο τρίτο τέσσερις, στο τέταρτο οκτώ κ.λπ, διπλασιάζοντας έτσι κάθε φορά στο επόμενο τετράγωνο.

Να βρείτε πόσοι τόνοι ρυζιού θα ήταν η ποσότητα αυτή αν 1Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

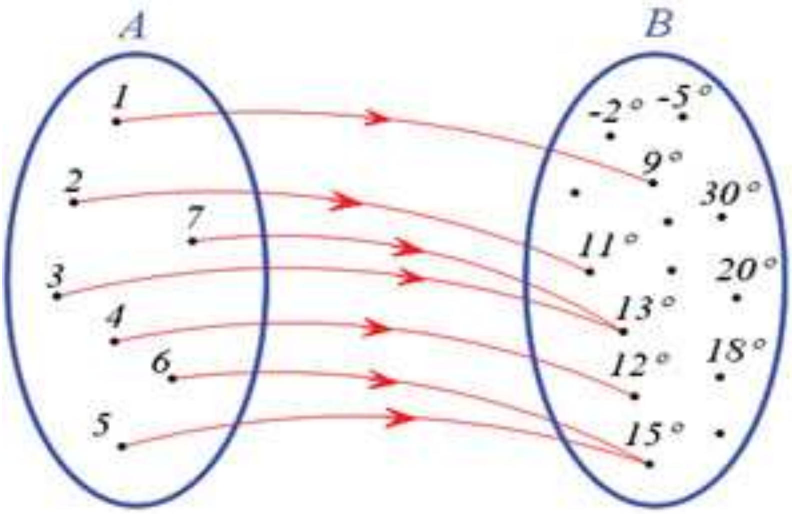
Ορισμός Συνάρτηση f από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο y του συνόλου Β. Συμβολίζουμε με :

$$f : A \to B \quad \text{και} \quad y = f(x)$$

Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή σύνολο ορισμού της f, ενώ το σύνολο Β λέγεται **πεδίο τιμών** της f. Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει τηντιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Όταν τα Α και Β είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, τότε μιλούμε για **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

Το παρακάτω σχήμα, απεικονίζει γραφικά την έννοια της συνάρτησης.



Έννοια της συνάρτησης.

Παρατηρήσεις - Σχόλια Εάν $f : A \to B$ είναι συνάρτηση τότε

- Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.

- Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f.
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B.

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
Σωστό ή Λάθος

1 Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται πραγματικής μεταβλητής όταν $B \subseteq R$ . . . **Σ Λ**

2 Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι το [1, 2] τότε $1 \leq f(x) \leq 2$ . . . . **Σ Λ**

3 Αν σε ένα αριθμό αντιστοιχίσουμε τρεις αριθμούς, τότε έχουμε συνάρτηση. . **Σ Λ**

4 Αν στους άρτιους αριθμούς αντιστοιχίσουμε το 2 και στους περιττούς το 1 τότε έχουμε συνάρτηση. . . . . **Σ Λ**

5 Αν $-2 \leq f(x) \leq 2$ τότε το 0 είναι τιμή της συνάρτησης f για κάποιο x . . . . . **Σ Λ**

6 Το σύνολο τιμών της $f(x) = x|x|^{-1}$ είναι το $\{-1, 1\}$ . . . . **Σ Λ**

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 6.1.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = x^2 + 1$

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Λύση 6.1.1

1. Επειδή $f(x) \in R$ για κάθε $x \in R$ το πεδίο ορισμού είναι το R.
2. Πρέπει $x^2 + 1 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in R$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το R.
3. Θα πρέπει

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $R - \{-1, 0, 1\}$.

4. Θα πρέπει

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x|^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$.

Άσκηση 6.1.2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = \dfrac{4}{x-1} + 5$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x + |x|}$

Λύση 6.1.2

1. Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, 1) \cup (1,\ +\infty)$.
2. Πρέπει

$$\begin{aligned} & x(x-4) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x \neq 0 \quad \text{και} \quad x - 4 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 4 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4,\ +\infty)$.

3. Επειδή $x^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in R$ το πεδίο ορισμού είναι το R.
4. Πρέπει

$$\begin{aligned} & x + |x| \neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & |x| \neq -x \\ \Leftrightarrow\quad & x > 0 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(0,\ +\infty)$.

Άσκηση 6.1.3 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

3) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

Λύση 6.1.3

1. Πρέπει

$$\begin{aligned} & x - 1 \geq 0 \quad \text{και} \quad 2 - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x \geq 1 \quad \text{και} \quad 2 \geq x \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $[1, 2]$.

2. Πρέπει

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -2 \quad ή \quad x \geq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

3. Πρέπει $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$. Είναι $\Delta = 16 - 12 = 4$ και οι ρίζες του τριωνύμου είναι 3 και 1. Άρα $1 \leq x \leq 3$ και πεδίο ορισμού είναι το $[1, 3]$
4. Πρέπει

$$x \geq 0 \quad και \quad \sqrt{x} \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad και \quad x \neq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Άσκηση 6.1.4 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - |x - 1|}}$

Λύση 6.1.4

1. Θα πρέπει $4 - x^2 \geq 0$ και $x - 1 \neq 0$.

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow |x| \leq 2$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $[-2, 1) \cup (1, 2]$.

2. Θα πρέπει $x - |x - 1| > 0 \Leftrightarrow |x - 1| > x$. Για να απαλλαγούμε από το απόλυτο (έχει ρίζα το 1), διακρίνουμε περιπτώσεις :
   - $x \geq 1$ τότε $|x - 1| = x - 1$ και

$$x - |x - 1| > 0 \Leftrightarrow x - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ αληθής}$$

   - $x < 1$ τότε $|x - 1| = -x + 1$ και

$$x - |x - 1| > 0 \Leftrightarrow x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$
$$\text{Συναλήθευση για } \frac{1}{2} < x < 1$$

Δηλαδή $x - |x - 1| > 0$ όταν $x \geq 1$ ή $\frac{1}{2} < x < 1$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Άσκηση 6.1.5 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$$\sqrt{-x^2+5x-4}-\sqrt[3]{x^2+7x+6}+\sqrt[5]{\frac{2-x}{x}}$$

Λύση 6.1.5 Θα πρέπει να συναληθεύουν οι κάτωθι ανισώσεις

$$\begin{cases} -x^2+5x-4 \geq 0 \\ x^2+7x+6 \geq 0 \\ \dfrac{2-x}{x} \geq 0, \quad x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4 \leq 0 \\ x^2+7x+6 \geq 0 \\ (2-x)x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-4) \leq 0 \\ (x+6)(x+1) \geq 0 \\ (x-2)x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \quad \text{και} \\ (x \leq -6 \text{ ή } x \geq -1) \quad \text{και} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[1, 2]$ που είναι και το ζητούμενο πεδίο ορισμού.

Άσκηση 6.1.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \geq 2 \\ x^2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = f(0) - 3f(1) + 2f(2) + f(3)$$

Λύση 6.1.6 Είναι

$f(0) = 0^2 = 0$
$f(1) = 1^2 = 1$
$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

άρα
$A = 0 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 7 = 14$

Άσκηση 6.1.7 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + 1$$

Να βρεθούν :
1. Το x ώστε να ισχύει : $f(x) = f(2x + 1) - 2$.
2. Το α αν $f(\alpha) = 3$.
3. Το β αν $f(2) = \beta$.
4. Το x αν $f(x) = 0$.

Λύση 6.1.7 Έχουμε :
1. $x + 1 = (2x + 1) + 1 - 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$.
2. $f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$.
3. $f(2) = \beta \Leftrightarrow 2 + 1 = \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.
4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Άσκηση 6.1.8 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & |x| \leq 1 \\ \alpha x, & |x| > 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα α,β αν $f(2) = 4$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Λύση 6.1.8 Επειδή $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ και $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$ η συνάρτηση γράφεται ισοδύναμα

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & -1 \leq x \leq 1 \\ \alpha x, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

- Επειδή $2 > 1$ το $f(2)$ είναι τιμή του 2ου κλάδου της συνάρτησης.

$$\begin{aligned} & f(2) = 4 \\ & \Leftrightarrow \alpha \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

- Επειδή $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ το $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ είναι τιμή του 1ου κλάδου της συνάρτησης.

$$\begin{aligned} & f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ & \Leftrightarrow \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \beta = 1 \\ & \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + \beta = 1 \\ & \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.1.9 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 3, & x \leq 2 \\ \alpha x^3 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί το α.

Λύση 6.1.9 Επειδή η f είναι συνάρτηση, για την κοινή τιμή x = 2 θα έχουμε μια τιμή του f(x). Δηλαδή θα πρέπει :

$$2\alpha \cdot 2 + 3 = \alpha 2^3 + 1$$

$$4\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 6.1.10 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\sqrt{x}$

2) $\sqrt{x+1}$

3) $\sqrt{1-3x}$

4) $\sqrt{x^2}$

5) $(\sqrt{x})^2$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Άσκηση 6.1.11 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\sqrt{x-1}$

2) $\sqrt{-2x+3}$

3) $\sqrt{x^2-9}$

4) $\sqrt{|x|-2}$

5) $\sqrt{x^2}$

6) $\sqrt{1-|x|}$

Άσκηση 6.1.12 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{3}{x^2-4}$

2) $\dfrac{x^2-5}{x^2-5x}$

3) $\dfrac{-2}{x^2+1}$

4) $\dfrac{-1}{|x|-1}$

5) $\dfrac{x+3}{x+|x|}$

6) $\dfrac{x-1}{|x-3|+5}$

Άσκηση 6.1.13 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{2x}{|x-1|-|3x+1|}$

2) $\dfrac{2}{x}+\sqrt{x-1}$

3) $\dfrac{x-1}{x+2}-\sqrt{x+3}$

4) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+2}$

5) $\sqrt{|x|-2}+\dfrac{x-1}{3x-1}$

6) $\dfrac{4x-1}{|x|-2}+\sqrt{x-5}$

Άσκηση 6.1.14 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\sqrt{x^2-2x-3}$

2) $\sqrt{-x^2-2x+8}$

3) $\sqrt{x^2-4x+5}$

4) $\sqrt{x^2-6x+9}$

5) $\sqrt{-x^2+2x-1}$

6) $\sqrt{-x^2+3x-4}$

Άσκηση 6.1.15 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{x+3}{x^2+8}$

2) $\dfrac{x-1}{x^3-9x}$

3) $\dfrac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

4) $\dfrac{5x-12}{x^3+x^2+x}$

5) $\dfrac{x-5}{x^4-27x}$

6) $\dfrac{x+2}{16x^6-x^2}$

Άσκηση 6.1.16 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{1}{2x-6}+\sqrt{x+2}$

2) $\dfrac{1+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4-x}}$

3) $\dfrac{x^2}{\sqrt{|2x-3|-5}}$

4) $\dfrac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$

5) $\dfrac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}+\sqrt{2-|x|}$

Άσκηση 6.1.17 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$

2) $\dfrac{3x}{x^2-3x-10}$

3) $\dfrac{2x-3}{x^2+3x-4}-\dfrac{4}{x-3}$

4) $\dfrac{5-x}{4x^2-9}+\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}$

5) $\dfrac{7x-13}{x^2+5x}-\dfrac{21}{x^2-2x-3}$

6) $\dfrac{2x}{x^2+2x-3}+\dfrac{3x-1}{4x^2-4x+1}$

Άσκηση 6.1.18 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\dfrac{x+21}{x^4-3x^2-4}$

2) $\dfrac{13-5x}{x^2-4|x|}$

3) $\dfrac{x^2-25}{2x^2-5|x|-3}$

4) $\dfrac{7-x}{x^2-7|x|+10}$

5) $\dfrac{1}{x^2+4|x|+3}$

6) $\dfrac{x-3}{x^6+7x^3-8}$

Άσκηση 6.1.19 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $\sqrt{(x-1)x^2+x-6}$

2) $\sqrt{(x^2-4)(x^2-2x-3)}$

3) $\sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2-2x+3)}{x^2+x-6}}$

4) $\sqrt{\dfrac{-x^2+4x+5}{(x-2)(x^2-6x+9)}}$

5) $\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2-9}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-3}$

Άσκηση 6.1.20 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2-3x-4$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές f(0), f(–1), f(4), f(5).
iii) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = –6.

Άσκηση 6.1.21 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές f(6), f(11), f(1).

Άσκηση 6.1.22 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2+7, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(\frac{5}{2})$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$.
iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

Άσκηση 6.1.23 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ αν } x < 1 \\ -x + 3, \text{ αν } 1 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ αν } x > 2 \end{cases}$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές $f(-1)$, $f(5)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$.

Άσκηση 6.1.24 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 6x, \text{ αν } |x| \leq 1 \\ x^2, \text{ αν } |x| > 1 \end{cases}$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$.

Άσκηση 6.1.25 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(f(1))$, $f(f(5))$.
iii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $f(2\alpha)$, $f(\alpha^2)$, $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$.

Άσκηση 6.1.26 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(5)$, $f(2)$, $f(f(1))$.
iii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $f(-3\alpha)$, $f(2\alpha^2)$, $f(\alpha - \beta)$.

Άσκηση 6.1.27 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3 - |x - 1|$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = f(3) - f(-1)$
iii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$
iv) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
v) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(4))x^2 + f(-6)x + f(10) \geq 0$$

Άσκηση 6.1.28 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2 + 8x}$$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
iii) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(\frac{1}{2})$.
iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) \geq 0$

Άσκηση 6.1.29 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 1, \text{ αν } x \leq 1 \\ \alpha x^2, \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το α.
ii) Να βρείτε την f.
iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

Άσκηση 6.1.30 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x - \sqrt{x + 3}$$

για την οποία ισχύει $f(6) = 9$.
i) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(13)$.

Άσκηση 6.1.31 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x + 3$$

για την οποία ισχύει $f(2) + f(5) = 7$.
i) Να βρείτε την τιμή του αριθμού λ

ii) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 8 και -2 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f.
iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 15$.

Άσκηση 6.1.32 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x,y \in R$$

Να αποδείξετε ότι :
i) $f(1)=0$
ii) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

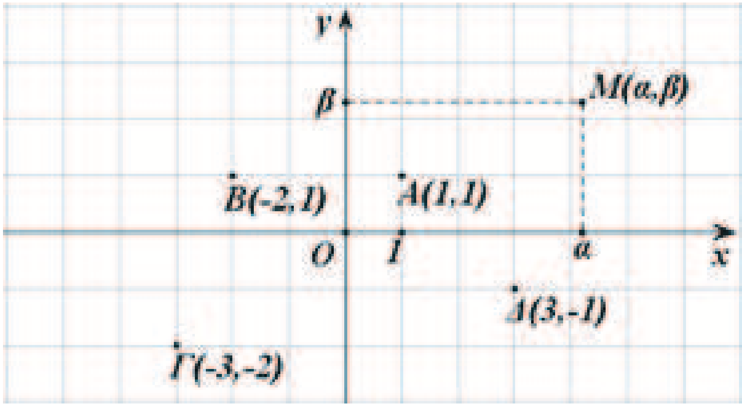
Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Αν σε ένα επίπεδο σχεδιάσουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με σημείο τομής το O τότε λέμε ότι έχουμε ένα **καρτεσιανό σύστημα αναφοράς** στο επίπεδο. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, τότε λέμε ότι το σύστημα αναφοράς είναι **ορθοκανονικό**. Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν θα λέμε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, θα εννοούμε ορθοκανονικό.

Με τη βοήθεια ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο M του επιπέδου, ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (α, β), φέροντας τις προβολές του M πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$, όπως φαίνεται στο σχήμα



Καρτεσιανό, (τετμημένη,τεταγμένη) σημείου.

Αντίστροφα, για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (α, β) όπου α,β είναι σημεία των αξόνων, $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα σημείο του επιπέδου M, φέροντας τις κάθετες στα α και β.

Ο αριθμός α (προβολή του M στον $x'x$ λέγεται **τετμημένη** του M, ενώ ο άξονας $x'x$ καλείται και άξονας τετμημένων. Ο αριθμός β (προβολή του M στον $y'y$ λέγεται **τεταγμένη** του M, ενώ ο άξονας $y'y$ καλείται και άξονας τεταγμένων.

Απόσταση σημείων : Έστω ότι, Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία αυτού. Είναι εύκολο να αποδείξουμε τότε, ότι η απόστασή τους δίνεται από τον κάτωθι τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Για να την απεικονίσουμε δε γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο, ακολουθούμε τα επόμενα βήματα :

- Διαλέγουμε ενδεικτικά σημεία $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ του πεδίου ορισμού.

- Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_\kappa)$.
- Μαρκάρουμε στο επίπεδο τα σημεία $(x_1, (f(x_1))$, $(x_2, (f(x_2))$, $\cdots$, $(x_\kappa, (f(x_\kappa))$.
- Τέλος, ενώνουμε τα σημεία που βρήκαμε.

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
Σωστό ή Λάθος

1 Το σημείο $M(-2, 5)$ έχει τετμημένη -2 και τεταγμένη 5. . . . . **Σ Λ**

2 Το σημείο $M(-1, 3)$ ανήκει στο 2^{o} τεταρτημόριο. . . . . **Σ Λ**

3 Τα σημεία $M(-1, 3)$ και $M(1, 3)$ είναι συμμετρικά ως προς $y'y$ . . . . **Σ Λ**

4 Τα σημεία $M(3, 2)$ και $M(2, 3)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων. . . . . **Σ Λ**

5 Η συνάρτηση $f(x) = |x| + 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ . . . . **Σ Λ**

6 Αν η συνάρτηση $f(x)$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ τότε δεν έχει πραγματικές ρίζες **Σ Λ**

7 Το σημείο $K(0, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = -x + 2$ . . . . . **Σ Λ**

8 Αν Α,Β,Γ τυχαία σημεία του επιπέδου, τότε ισχύει $(AB) + (B\Gamma) \geq (A\Gamma)$ . . . . **Σ Λ**

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 6.2.1 Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(2, 3)$ ως προς

1 . Τον άξονα $x'x$.

2 . Τον άξονα $y'y$.

3 . Την διχοτόμο του πρώτου τεταρτημόριου.

Λύση 6.2.1 Θα είναι

1 . $A'(2, -3)$.

2 . $A'(-2, 3)$.

3 . $A'(3, 2)$.

Άσκηση 6.2.2 Το σημείο $Α(3κ + 5, 4 - κ)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του.

Λύση 6.2.2 Επειδή το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα $x'x$, η τεταγμένη του θα είναι 0. Θα ισχύει λοιπόν ότι

$$4 - κ = 0 \Leftrightarrow κ = 4$$

Τότε η τετμημένη του σημείου είναι $3 \cdot 4 + 5 = 17$, οπότε οι συντεταγμένες του είναι $Α(17, 0)$.

Άσκηση 6.2.3 Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β :

1) $Α(-1, 4)$ $Β(2, -1)$ 2) $Α(-5, -2)$ $Β(-1, -3)$

Λύση 6.2.3 Θα είναι

1.

$$\begin{aligned}(ΑΒ) &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-4)^2} \\ &= \sqrt{9+25} = \sqrt{36} = 6\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(ΑΒ) &= \sqrt{(-1-(-5))^2 + (-3-(-2))^2} \\ &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17}\end{aligned}$$

Άσκηση 6.2.4 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α(1, 3)$,$Β(-1, 0)$ και $Γ(3, 0)$ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

Λύση 6.2.4 Υπολογίζουμε τις αποστάσεις (ΑΒ),(ΒΓ) και (ΑΓ).

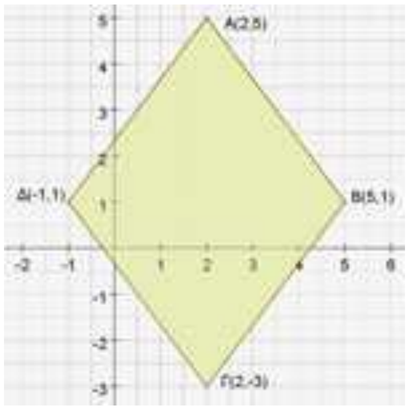
$$\begin{aligned}(ΑΒ) &= \sqrt{(-1-1)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ΒΓ) &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-0)^2} \\ &= \sqrt{4^2} = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ΑΓ) &= \sqrt{(3-1)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

Επειδή $(ΑΒ) = (ΑΓ)$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος



Άσκηση 6.2.5 Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία :

$$A(2,\ 5),\quad B(5,\ 1),\quad Γ(2,\ -3) \text{ και } Δ(-1,\ 1)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

Λύση 6.2.5

Λύση 6.2.5 Κάνουμε το σχήμα και κατόπιν υπολογίζουμε τις αποστάσεις (ΑΒ),(ΒΓ),(ΓΔ) και (ΔΑ).

$$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(BΓ) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(ΓΔ) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(ΔA) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Είναι λοιπόν (ΑΒ) = (ΒΓ) = (ΓΔ) = (ΔΑ), άρα (ΑΒΓΔ) είναι ρόμβος.

Άσκηση 6.2.6 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} - x + 3$$

Να εξετάσετε αν το σημείο Α(3, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Λύση 6.2.6 Θα πρέπει να δείξουμε ότι $f(3) = 2$. Πραγματικά :

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{(3-1)^2}{2} - 3 + 3 \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.2.7 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

1) $f(x) = 2x + 5$ 2) $x^2 - 4x + 3$

Λύση 6.2.7

1) $f(x) = 2x + 5$.

- Για $x = 0$ βρίσκω $y = f(0) = 5$. Άρα το σημείο $(0,\ 5)$ είναι το σημείο που η $2x + 5$ τέμνει τον άξονα y′y.

- Για y = 0 βρίσκω $0 = 2x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$. Άρα το σημείο $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ είναι το σημείο που η $2x + 5$ τέμνει τον άξονα x′x.

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Για x = 0 βρίσκω $y = f(0) = 3$. Άρα το σημείο (0, 3) είναι το σημείο που η $x^2 - 4x + 3$ τέμνει τον άξονα y′y.
- Για y = 0 βρίσκω

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4, \quad \text{άρα}$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 3 \text{ και } 1$$

Άρα τα σημεία που η $x^2 - 4x + 3$ τέμνει τον άξονα x′x είναι τα (0, 1) και (0, 3).

Άσκηση 6.2.8 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

1) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ 2) $g(x) = (x - 1)^2$

3) $h(x) = x^2 + x + 1$ 4) $q(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$

Λύση 6.2.8

1) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

- Για x = 0 βρίσκω $y = f(0) = (0 - 2)(0 - 3) = 6$. Άρα το σημείο (0, 6) είναι το σημείο που η C_f τέμνει τον άξονα y′y.
- Για y = 0 βρίσκω

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία (2, 0) και (3, 0).

2) $g(x) = (x - 1)^2$.

- Για x = 0 βρίσκω $y = g(0) = (0 - 1)^2 = 1$. Άρα το σημείο (0, 1) είναι το σημείο που η C_g τέμνει τον άξονα y′y.
- Για y = 0 βρίσκω

$$(x - 1)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα η C_g τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (1, 0).

3) $h(x) = x^2 + x + 1$.

- Για x = 0 βρίσκω $y = h(0) = 1$. Άρα το σημείο (0, 1) είναι το σημείο που η C_h τέμνει τον άξονα y′y.

- Για y = 0 βρίσκω

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Άρα η C_h δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x′x.

4) $q(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$.

- Θα πρέπει

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 4$$
$$\Leftrightarrow \quad |x| \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -2 \quad \text{ή} \quad x \geq 2$$

Ο x δε μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, άρα η C_q δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα y′y.

- Για y = 0 βρίσκω

$$x\sqrt{x^2 - 4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

Άρα η C_q τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία (2, 0) και (−2, 0).

Άσκηση 6.2.9 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 1$$

Να βρείτε :

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x.

Λύση 6.2.9

i) $f(x) = x^2 - 1$.

- Για x = 0 βρίσκω y = f(0) = −1. Άρα το σημείο (0, − 1) είναι το σημείο που η C_f τέμνει τον άξονα y′y.
- Για y = 0 βρίσκω

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία 12, 0) και (−1, 0).

i) Πρέπει

$$f(x) > 0$$
$$x^2 - 1 > 0$$
$$x^2 > 1$$
$$|x| > 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \quad ή \quad x \geq 1$$

Άσκηση 6.2.10 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x - 6$$

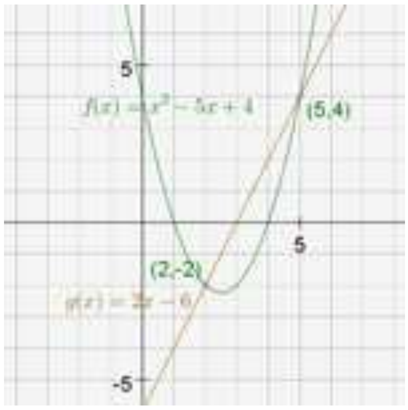
Να βρείτε :

i) Τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη C_g.

Λύση 6.2.10

i) Θα πρέπει



$$f(x) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 2x - 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad ή \quad x = 5$$

Τότε $f(2) = g(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$ και $f(5) = g(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$. Τα κοινά σημεία δηλαδή των C_f, C_g είναι τα 2, $-$ 2) και (5, 4).

ii) Θα πρέπει

$$f(x) < g(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 < 2x - 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 < x < 5$$

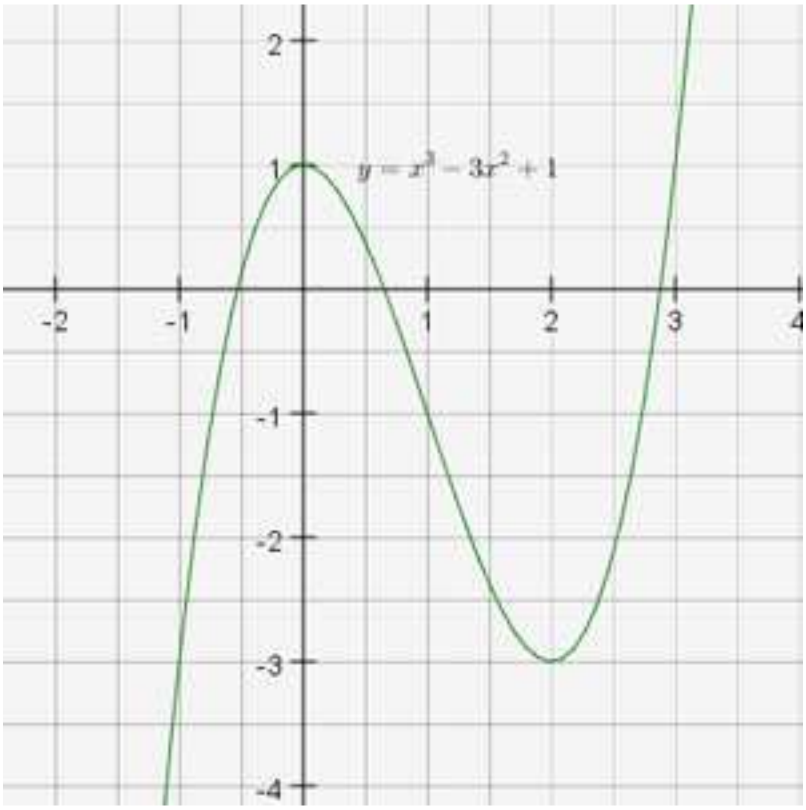
Άσκηση 6.2.11 Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Λύση 6.2.11 Κατασκευάζω ένα ενδεικτικό πίνακα τιμών

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-19	-3	1	-1	-3	1

Συνεχίζω κατόπιν στο γράφημα της συνάρτησης.



Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 6.2.12 Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία :

$$A(-1, 3) \quad B(2, -3) \quad \Gamma(-4, -2) \quad \Delta(3, 2)$$
$$E(-4, 0) \quad Z(0, 2) \quad H(0, -3) \quad \Theta(4, 0)$$

Άσκηση 6.2.13 Να βρείτε τις τιμές των λ, μ ώστε το σημείο :
i) $A(\lambda+\mu, \mu-1)$ να βρίσκεται στον ημιάξονα Ox.
ii) $B(\lambda-2, \lambda-\mu)$ να βρίσκεται στον ημιάξονα Oy′.
iii) $\Gamma(\lambda-3, \lambda+1)$ να βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο.

Άσκηση 6.2.14 Το σημείο $A(2\kappa+4, 3-\kappa)$ βρίσκεται στον άξονα x′x. Να βρείτε τις συντεταγμένες του.

Άσκηση 6.2.15 Το σημείο $B(12-3\kappa, 5\kappa-10)$ βρίσκεται στον άξονα y′y. Να βρείτε τις συντεταγμένες του.

Άσκηση 6.2.16 Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων

$$A(7, -2) \quad B(3, 5) \quad \Gamma(-4, 7) \quad \Delta(-2, -6)$$

i) τον άξονα x′x.
ii) τον άξονα y′y.
iii) την αρχή των αξόνων.
iv) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 6.2.17 Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων

$$A(4, 0) \quad B(0, -5) \quad \Gamma(4, -3) \quad \Delta(2, -1)$$

i) τον άξονα x′x.
ii) τον άξονα y′y.
iii) την αρχή των αξόνων.
iv) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 6.2.18 Τα σημεία $A(5-3\lambda, 2\mu-\lambda)$ και $B(4, 1)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in R$

Άσκηση 6.2.19 Τα σημεία $A(\alpha^2+2\alpha, 2-2\alpha)$ και $B(\alpha+6, \alpha^2-\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τον $\alpha \in R$.

Άσκηση 6.2.20 Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β :

1) $A(3, 2)$ $B(2, 1)$
2) $A(2, 1)$ $B(-3, 1)$
3) $A(2, 3)$ $B(-3, -4)$
4) $A(-5, -6)$ $B(3, 4)$

Άσκηση 6.2.21 Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β :

1) $A(2, 4)$ $B(5, 8)$
2) $A(-5, 1)$ $B(7, 6)$
3) $A(-3, -4)$ $B(3, 4)$
4) $A(-6, -7)$ $B(6, 9)$

Άσκηση 6.2.22 Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β :

1) $A(4, 0)$ $B(0, 5)$
2) $A(-7, -3)$ $B(-3, 0)$
3) $A(-6, 8)$ $B(0, 0)$
4) $A(0, 0)$ $B(0, 2)$

Άσκηση 6.2.23 Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β :

1) $A(-2, 0)$ $B(1, -3)$
2) $A(0, 0)$ $B(1, 1)$
3) $A(6, -1)$ $B(6, -2)$
4) $A(3, -2)$ $B(-3, -2)$

Άσκηση 6.2.24 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 2)$,$B(-2, -3)$ και $\Gamma(1, 1)$ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

Άσκηση 6.2.25 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-5, 3)$,$B(-1, -2)$ και $\Gamma(4, 2)$ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου.

Άσκηση 6.2.26 Δίνονται τα σημεία $A(4, 0)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(5, 3)$. Να αποδειχθεί ότι οι γωνίες ΑΒΓ και ΑΓΒ είναι ίσες.

Άσκηση 6.2.27 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(3, 2)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(4, -2)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

Άσκηση 6.2.28 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, -2)$ και $\Gamma(-3, 5)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

Άσκηση 6.2.29 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(4, 2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Άσκηση 6.2.30 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(-2, -2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Άσκηση 6.2.31 Να βρεθεί ο x ώστε η απόσταση των σημείων $A(x, 2)$ και $B(1, -2)$ να είναι 5.

Άσκηση 6.2.32 Να βρεθεί το $\alpha \in R$ ώστε η απόσταση των σημείων $A(-2, \alpha)$ και $B(9 - \alpha, 2\alpha + 3)$ να είναι 10.

Άσκηση 6.2.33 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x - 2$$

Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f:

$$A(2, 4) \quad B(-1, -6) \quad \Gamma(0, -2) \quad \Delta(-4, -10)$$

Άσκηση 6.2.34 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{αν} \quad x \geq 2 \\ |x - 3| - 3 & \text{αν} \quad x < 2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f:

$$A(5,\ 10) \quad B(-1,\ -2) \quad \Gamma(2,\ -1) \quad \Delta(3,\ 0)$$

Άσκηση 6.2.35 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

1) $(x-3)(x+1)$

2) x^2-2x-8

3) $\dfrac{x-2}{x^2+x}$

4) $\sqrt{x+2}$

Άσκηση 6.2.36 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

1) $|x-1|+2$

2) $3x-12$

3) x^2-9

4) $|2x-5|-7$

Άσκηση 6.2.37 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

1) $\dfrac{x+6}{x-2}$

2) $\dfrac{x^2-5x+4}{x+2}$

3) $\sqrt{|x|-3}$

4) $\sqrt{4-x}$

Άσκηση 6.2.38 Το σημείο $M(-3,\ -5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^2+\alpha x-8$$

Να βρείτε :

i) τον αριθμό α

ii) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Άσκηση 6.2.39 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = |x+\alpha|-7+\alpha$$

διέρχεται από το σημείο Μ(5 – α, 3). Να βρείτε:

i) τον αριθμό α.

ii) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Άσκηση 6.2.40 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{6}{x-2}$$

i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$, όταν το σημείο Μ(5, 8) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ii) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(4, 11) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Άσκηση 6.2.41 Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{και}$$
$$g(x) = 5x - 9$$

Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

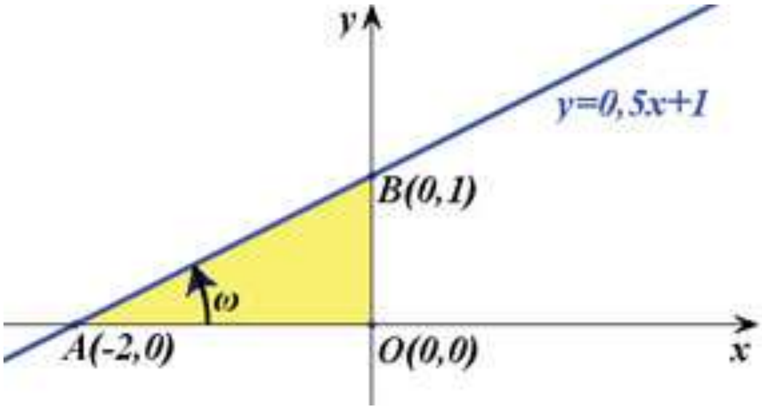
Άσκηση 6.2.42 Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = |x-1| + 2x \quad \text{και}$$
$$g(x) = 2x + 5$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = αx + β$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = αx + β$ είναι μια ευθεία η οποία :
1. Τέμνει τον άξονα των y στο (0, β).
2. Σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία ω για την οποία ισχύει εφ ω = α



Συνάρτηση $f(x) = 0,5x + 1$.

Τον αριθμό αυτό α τον καλούμε και **συντελεστή διεύθυνσης** της $f(x) = αx + β$ ή **κλίση** της ευθείας. Γενικά για την γωνία ω ισχύει

$$0^0 \leq ω < 180^0$$

και όταν
- $ω = 0^0$ τότε $α = 0$. Η ευθεία έχει εξίσωση $y = β$
- $0^0 < ω < 90^0$ τότε $α > 0$
- $90^0 < ω < 180^0$ τότε $α < 0$

Ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται όταν $ω = 90^0$. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής

$$x = c$$

Σχετική θέση δύο ευθειών Έστω δύο ευθείες $ε_1, ε_2$ με εξισώσεις $y = α_1x+β_1$ και $y = α_2x+β_2$ αντίστοιχα.
- Είναι προφανές ότι αν οι δύο ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης τότε είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Ισχύει δηλαδή :

$$ε_1, ε_2 \text{ παράλληλες} \Leftrightarrow α_1 = α_2$$

  όταν δε επιπλέον $β_1 = β_2$ τότε ταυτίζονται.
- Επίσης αποδεικνύεται ότι, όταν δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους τότε το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεών τους είναι ίσο με -1. Ισχύει δηλαδή :

$$ε_1, ε_2 \text{ κάθετες} \Leftrightarrow α_1α_2 = -1$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από δύο σημεία Έστω (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δύο σημεία του επιπέδου. Η εξίσωση της ευθείας τότε που διέρχεται απο τα (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Εξίσωση ευθείας διερχομένης από σημείο με δοθέντα συντελεστή Έστω (x_1, y_1) ένα σημείο του επιπέδου και α δοθείς συντελεστής διεύθυνσης. Η εξίσωση της ευθείας τότε που διέρχεται απο το (x_1, y_1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης α δίνεται από τον τύπο

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \alpha$$

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$
Σωστό ή Λάθος

1 Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. **Σ Λ**

2 Ο συντελεστής διεύθυνσης της διχοτόμου της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων είναι ίσος με 1. . . . . **Σ Λ**

3 Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας παράλληλης με τον άξονα $x'x$ είναι 0. **Σ Λ**

4 Ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται για $\omega = 90^o$. . . . . **Σ Λ**

5 Η ευθεία $y = 5$ είναι κάθετη στον άξονα $y'y$. . . . . **Σ Λ**

6 Αρνητικός συντελεστής διεύθυνσης σημαίνει ότι $90^o \leq \omega \leq 180^o$. . . . . . . **Σ Λ**

7 Δύο παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. . . . . . . **Σ Λ**

8 Το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης δύο κάθετων ευθειών ισούται με -1. **Σ Λ**

9 Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(5, 0)$ έχει αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης. . . . . **Σ Λ**

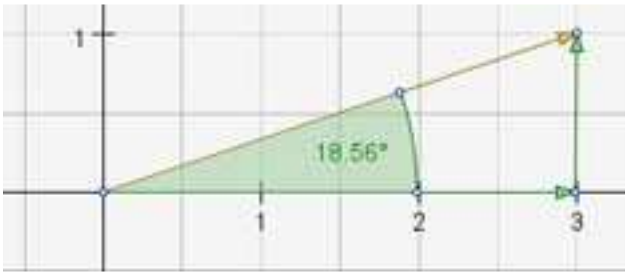
10 Οι ευθείες $y = 2x + 5$ και $y = -2x + 5$ είναι κάθετες. . . . . **Σ Λ**

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = αx + β$
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 6.3.1 Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία ω τέτοια ώστε

$$εφω = \frac{1}{3}$$

Λύση 6.3.1 Η γεωμετρική κατασκευή φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Προχωρούμε στον άξονα $x'x$ τόσες μονάδες όσο ο παρανομαστής και στον άξονα $y'y$ τόσες μονάδες όσο ο αριθμητής του δοθέντος κλάσματος.



Γεωμετρική κατασκευή εφαπτομένης κλάσματος.

Άσκηση 6.3.2 Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία

1) $y = x + 2$

2) $y = \sqrt{3}x - 1$

3) $y = -x + 1$

4) $y = -\sqrt{3}x + 2$

Λύση 6.3.2 Είναι

1) $εφ\,ω = 1 \Leftrightarrow ω = 45^o$

2) $εφ\,ω = \sqrt{3} \Leftrightarrow ω = 60^o$

3) $εφ\,ω = -1 \Leftrightarrow ω = 135^o$

4) $εφ\,ω = -\sqrt{3} \Leftrightarrow ω = 120^o$

Άσκηση 6.3.3 Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία :

1) $A(1, 2)$ και $B(2, 3)$

2) $A(1, 2)$ και $B(2, 1)$

3) Α(2, 1) και Β(–1, 1) 4) Α(1, 3) και Β(2, 1)

Λύση 6.3.3 Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$$

1) $α = \dfrac{3-2}{2-1} = 1$

2) $α = \dfrac{1-2}{2-1} = -1$

3) $α = \dfrac{1-1}{-1-2} = 0$

4) $α = \dfrac{1-3}{2-1} = -2$

Άσκηση 6.3.4 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο

$$Μ(3, -4)$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{2}$.

Λύση 6.3.4 Θα είναι :

$$\frac{y-(-4)}{x-3} = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow y + 4 = \sqrt{2}(x-3)$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - 3\sqrt{2} - 4$$

Άσκηση 6.3.5 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία

$$Α(-5, 1) \quad \text{και} \quad Β(-2, -3)$$

Λύση 6.3.5 Θα είναι :

$$\frac{y-1}{x-(-5)} = \frac{-3-1}{-2-(-5)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{x+5} = \frac{-4}{3}$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$$

Άσκηση 6.3.6 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το Μ(−5, −2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = -\frac{3x+5}{7} + 3$$

Λύση 6.3.6 Ο συντελεστής διεύθυνσης της f είναι $-\frac{3}{7}$. Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης μιας παράλληλης προς αυτήν θα είναι $-\frac{3}{7}$. Επειδή δε διέρχεται από το Μ(−5, −2), η εξίσωσή της θα είναι :

$$\begin{aligned} & \frac{y+2}{x+5} = -\frac{3}{7} \\ \Leftrightarrow \quad & y+2 = -\frac{3}{7}x - \frac{15}{7} \\ \Leftrightarrow \quad & y = -\frac{3}{7}x - \frac{29}{7} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.3.7 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(3, 1) και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = -\frac{x-1}{3} + 4$$

Λύση 6.3.7 Ο συντελεστής διεύθυνσης της f είναι $-\frac{1}{3}$. Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης μιας κάθετης προς αυτήν θα είναι 3. Επειδή δε διέρχεται από το Μ(3, 1), η εξίσωσή της θα είναι :

$$\begin{aligned} & \frac{y-1}{x-3} = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & y-1 = 3x-9 \Leftrightarrow y = 3x-8 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.3.8 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία :

i) Έχει κλίση α = –1 και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β(0, 2).
ii) Σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία ω = 45° και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β(0, 1).
iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία y = 2x–3 και διέρχεται από το σημείο Α(1, 1).

Λύση 6.3.8 Έστω ε : y = αx + β η ζητούμενη ευθεία.

i) Θα είναι $y = -1 \cdot x + 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$
ii) Θα είναι α = εφ ω = εφ 45° = 1 άρα ε : y = x + 1
iii) Η ε είναι παράλληλη με την $y = 2x - 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Επειδή δε διέρχεται από το (0, 1) θα ισχύει :

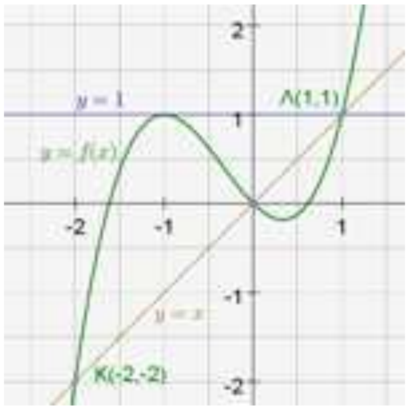
$$1 = \alpha \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

Άρα ε : $y = 2x - 1$

Άσκηση 6.3.9 Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία y = x. Να λύσετε γραφικά :

i) Τις εξισώσεις f(x) = 1 και f(x) = x.

ii) Τις ανισώσεις f(x) < 1 και f(x)x.



Λύση 6.3.9

i)

- Για την εξίσωση f(x) = 1 Αναζητάμε τα x για τα οποία η τιμή της f είναι 1. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι x = –1 ή x = 1.
- Για την εξίσωση f(x) = x Αναζητάμε τα x για τα οποία η τιμή της f είναι x. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι x = –2 ή x = 0 ή x = 1.

ii)

- Για την ανίσωση f(x) < 1 Αναζητάμε τα $x \in R$ για τα οποία η τιμή της f είναι < 1. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι εκείνα για τα οποία η C_f είναι κάτω από την ευθεία y = 1, δηλαδή είναι τα $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.
- Για την ανίσωση $f(x) \geq x1$ Αναζητάμε τα $x \in R$ για τα οποία η τιμή της f είναι $\geq$ x. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι εκείνα για τα οποία η C_f είναι πάνω από την ευθεία y = x, δηλαδή είναι τα $x \in [-2, 0) \cup [1, +\infty)$.

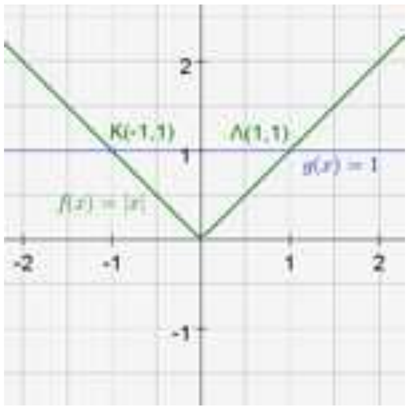
Άσκηση 6.3.10 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

i) Με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις :

$$|x| \leq 1 \quad \text{και} \quad |x| > 1$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.



Λύση 6.3.10

i)

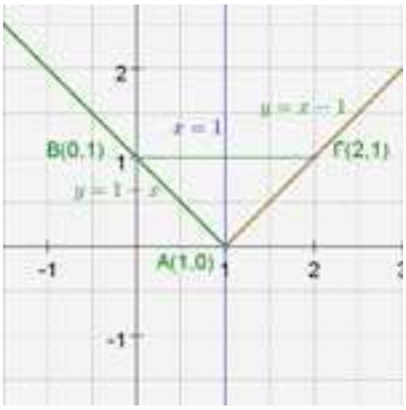
- Για την ανίσωση $|x| \leq 1$ Αναζητάμε τα $x \in R$ για τα οποία η τιμή της $|x|$ είναι ≤ 1. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι εκείνα για τα οποία η C_f είναι κάτω από την ευθεία g(x) = 1ή την τέμνει, δηλαδή είναι τα $x \in [-1, 1]$.
- Για την ανίσωση $|x| > 1$ Αναζητάμε τα $x \in R$ για τα οποία η τιμή της $|x|$ είναι > 1. Από το σχήμα, αυτά τα x είναι εκείνα για τα οποία η C_f είναι πάνω από την ευθεία g(x) = 1, δηλαδή είναι τα $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

ii) Αλγεβρική επιβεβαίωση

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ή} x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

Άσκηση 6.3.11 Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας y = 1–x και ανακλάται στον άξονα των x′x. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.



Λύση 6.3.11

Έστω Α,Β τα σημεία τομής της ευθείας y = 1–x με τους άξονες.

Για y = 0 έχουμε 0 = 1–x ⇔ x = 1. Άρα οι συντεταγμένες του Α είναι (1, 0).

Για x = 0 έχουμε y = 1, άρα οι συντεταγμένες του Β είναι (0, 1).

Η ανακλώμενη ακτίνα, είναι συμμετρική της ευθείας y = 1–x ως προς την κατακόρυφη ευθεία x = 1 και το συμμετρικό του Β ως προς την x = 1 είναι το Γ(2, 1). Ζητάμε να βρούμε λοιπόν την εξίσωση της ευθείας που διέχεται από τα Α(1, 0) και Γ(2, 1). Αυτή είναι :

$$\frac{y-0}{x-1} = \frac{1-0}{2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x - 1$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 6.3.12 Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία ω τέτοια ώστε :

$$1)\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{5} \quad 2)\ \varepsilon\varphi\omega = 2 \quad 3)\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} \quad 4)\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{7}$$

Άσκηση 6.3.13 Να βρείτε σε κάθε περίπτωση, τη γωνία που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$:

1) $f(x) = x + 5$

2) $f(x) = -x + 13$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 7$

4) $f(x) = \sqrt{3}x + 2$

Άσκηση 6.3.14 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο

$$M(-5, 1)$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Άσκηση 6.3.15 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο

$$M(-2,\ -1)$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{2}{5}$.

Άσκηση 6.3.16 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία

1) $A(5, 0)$ και $B(0, 5)$

2) $A(1, 2)$ και $B(2, 1)$

3) $A(2, 1)$ και $B(-1, 1)$

4) $A(1, 3)$ και $B(2, 1)$

Άσκηση 6.3.17 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία

1) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ και $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{7}\right)$ 2) $A(\sqrt{2}, -\sqrt{7})$ και $B(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$

Άσκηση 6.3.18 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(3, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = -\frac{2x}{7} + \frac{1}{3}$$

Άσκηση 6.3.19 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το κέντρο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = \frac{x+5}{4} + \frac{2}{7}$$

Άσκηση 6.3.20 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(−4, −2) και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = \frac{2x}{5} - 2$$

Άσκηση 6.3.21 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(2, −1) και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = -\frac{2x-1}{3} - 4$$

Άσκηση 6.3.22 Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες

$y = (1 - \lambda^2)x + 3$ και

$y = (\lambda - 1)x$

να είναι παράλληλες.

Άσκηση 6.3.23 Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες

$$y = (\lambda^2 - 2\lambda)x + 1 \quad \text{και}$$
$$y = -1$$

να είναι παράλληλες.

Άσκηση 6.3.24 Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες

$$y = \lambda x + 2 \quad \text{και}$$
$$y = (\lambda + 2)x - 1$$

να είναι κάθετες.

Άσκηση 6.3.25 Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες

$$y = \lambda^3 x + 1 \quad \text{και}$$
$$y = -\lambda x$$

να είναι κάθετες.

Άσκηση 6.3.26 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(3, 5) και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση

$$f(x) = -\sqrt{2}x - 3$$

Άσκηση 6.3.27 Δίνεται η ευθεία

$$y = (\lambda^2 + 1)x + \lambda - 3, \quad \lambda \in R$$

Να βρείτε:

i. Για ποια $\lambda \in R$ η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(1, 4).
ii. Για ποια $\lambda \in R$ η ευθεία είναι παράλληλη στην $y = 10x + 5$.
iii. Για ποια $\lambda \in R$ η ευθεία είναι κάθετη στην $x = -\frac{1}{2}x + 6$.

Άσκηση 6.3.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε βαθμούς Celcius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0^oC ή 32^oF και βράζει σε 100^oC ή 212^oF.

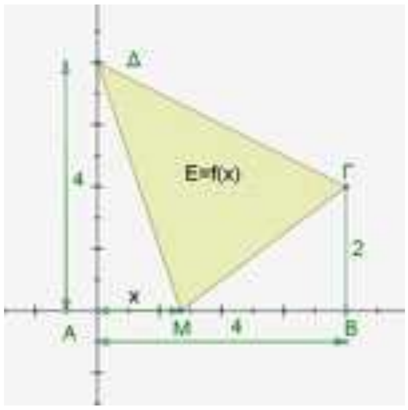
Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

Άσκηση 6.3.29 Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 lt βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο, που περιέχει 2000 lt, βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 lt το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου :

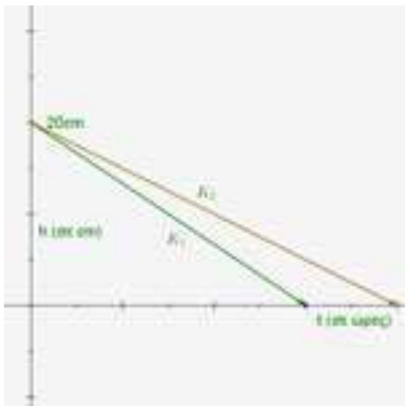
i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης :
   α) στο βυτιοφόρο και
   β) στη δεξαμενή.

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

Άσκηση 6.3.30 Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με f(x) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΓΔ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης Ε = f(x) και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



Άσκηση 6.3.31 Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους 20 cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα K_1 και K_2, του διπλανού σχήματος.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

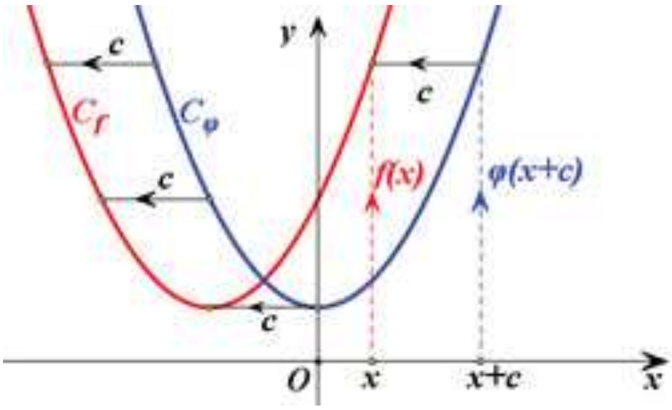
Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Πολλές φορές όταν έχουμε κατασκευάσει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (μιας καμπύλης εν γένει) στο καρτεσιανό επίπεδο, θέλουμε (εκ των αναγκών κάποιου προβλήματος) να μετατοπίσουμε την καμπύλη λίγο αριστερά ... ή λίγο δεξιά ή λίγο πάνω ... ή κάτω. Με άλλα λόγια, ζητούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης για αυτή τη μετατοπισμένη καμπύλη.

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι λίγο πολύ προφανής. Αναλυτικότερα, αν f(x) είναι μια συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f και $\rho > 0$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

- Η συνάρτηση
$$f(x)+\rho$$
μετατοπίζει την καμπύλη C_f ρ μονάδες κάθετα πάνω.
- Η συνάρτηση
$$f(x)-\rho$$
μετατοπίζει την καμπύλη C_f ρ μονάδες κάθετα κάτω.
- Η συνάρτηση
$$f(x+\rho)$$
μετατοπίζει την καμπύλη C_f ρ μονάδες οριζόντια αριστερά.
- Η συνάρτηση
$$f(x-\rho)$$
μετατοπίζει την καμπύλη C_f ρ μονάδες οριζόντια δεξιά.



Μετατόπιση συνάρτησης αριστερά $\varphi(x+c)$.

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Η συνάρτηση
$$f(x-\rho)+\kappa \text{ όπου } \rho, \kappa > 0$$
μετατοπίζει την καμπύλη $C_{f(x)}$ ρ μονάδες οριζόντια δεξιά και κ μονάδες κάθετα πάνω.

2. Το πρόβλημα που τέθηκε σε αυτή την παράγραφο περί μετατόπισης μιας γραφικής παράστασης διατυπώνεται αλλιώς και ως πρόβλημα αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων.

6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης
Σωστό ή Λάθος

1	Η συνάρτηση $f(x) = (x+3)^2$ κείτεται δεξιότερα της συνάρτησης $\varphi(x) = x^2$. . . .	**Σ**	**Λ**
2	Η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2 + 5$ έχει ρίζες πραγματικές.	**Σ**	**Λ**
3	Η συνάρτηση $f(x) = 8 \cdot 2^x$ κείτεται τρεις μονάδες αριστερότερα $\varphi(x) = 2^x$. . . .	**Σ**	**Λ**
4	Αν $f(x) = \varphi(x+c)$ τότε οι $f(x)$ και $\varphi(x)$ δεν τέμνονται.	**Σ**	**Λ**
5	Μία οριζόντια μετατόπιση ευθείας αλλάζει τον συντελεστή διεύθυνσής της. .	**Σ**	**Λ**
6	Μία κατακόρυφη μετατόπιση ευθείας αλλάζει τον συντελεστή διεύθυνσής της.	**Σ**	**Λ**

6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης
Ασκήσεις Λυμένες

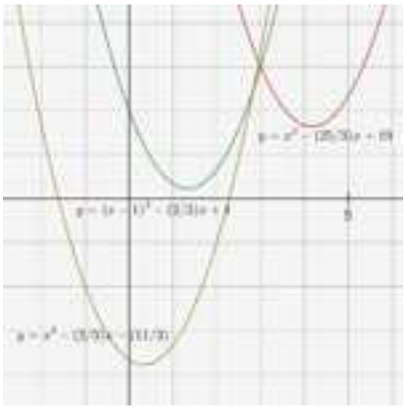
Άσκηση 6.4.1 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x - 1)^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

i) διαδοχικά κατά 3 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω.

ii) διαδοχικά κατά 1 μονάδες προς τα αριστερά και 4 μονάδες προς τα κάτω.



i) $x^2 - \frac{25}{3}x + 19$ και ii) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$

Λύση 6.4.1

i) Η ζητουμένη μετατόπιση προκύπτει από τις ακόλουθες αντικαταστάσεις :

$x \leftarrow x - 3$

$y \leftarrow y - 2$

θα είναι τότε

$$y - 2 = ((x - 3) - 1)^2 - \frac{2}{3}(x - 3) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (x - 4)^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 8x + 16 - \frac{2}{3}x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - \frac{25}{3}x + 19$$

ii) Η ζητουμένη μετατόπιση προκύπτει από τις ακόλουθες αντικαταστάσεις :

$$x \leftarrow x + 1$$
$$y \leftarrow y + 4$$

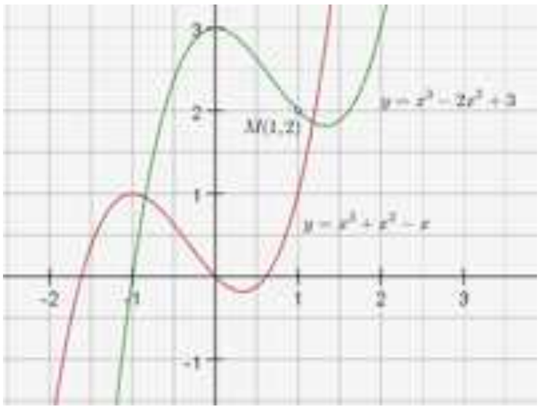
θα είναι τότε

$$y + 4 = ((x + 1) - 1)^2 - \frac{2}{3}(x + 1) + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$$

Άσκηση 6.4.2 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο M(1, 2) είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f.
ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης ο οποίος μετατοπίζει την C_f κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο M να συμπέσει με την αρχή των αξόνων.



$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ και $g(x) = x^3 + x^2 - x$.

Λύση 6.4.2

i) Πραγματικά ισχύει

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 = 2$$

ii) Η C_f θα πρέπει να μετατοπιστεί έτσι ώστε το Μ(1, 2) να συμπέσει με το Ο(0, 0), δηλαδή μία μονάδα αριστερά και δύο μονάδες κάτω. Οπότε οι ζητούμενες αντικαταστάσεις θα είναι :

$x \leftarrow x + 1$

$y \leftarrow y + 2$

θα είναι τότε

$$y + 2 = (x + 1)^3 - 2(x + 1)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^3 + x^2 - x$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 6.4.3 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3$ και $g(x) = (x+1)^3$

ii) $f(x) = -x^3$ και $g(x) = -x^3 + 2$

iii) $f(x) = x^3$ και $g(x) = (x-3)^3 + 2$

Άσκηση 6.4.4 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

ii) $f(x) = -\sqrt{x}$ και $g(x) = -\sqrt{x+1}$

iii) $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{x+2} - 1$

Άσκηση 6.4.5 Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f,της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ :

i) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.
ii) κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.
iii) διαδοχικά κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω.
iv) διαδοχικά κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 7 μονάδες προς τα κάτω.

Άσκηση 6.4.6 Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = x^2 + 11x + 13$$

και έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Να βρείτε :

i) τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
iii) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 6.4.7 Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = |2x - 7| + 4$$

και έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 9 μονάδες προς τα κάτω. Να βρείτε :

i) τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.
ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
iii) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

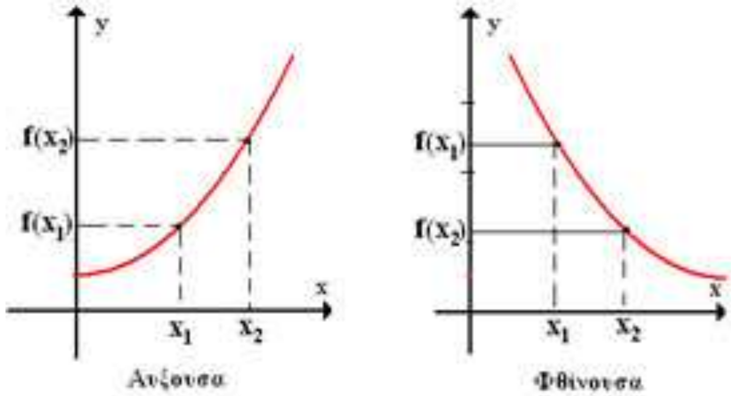
Άσκηση 6.4.8 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{2}$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, -4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f.
ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης ο οποίος μετατοπίζει την C_f κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο Μ να συμπέσει με την αρχή των αξόνων.

6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης

Μονοτονία



Συναρτήσεις αύξουσα, φθίνουσα.

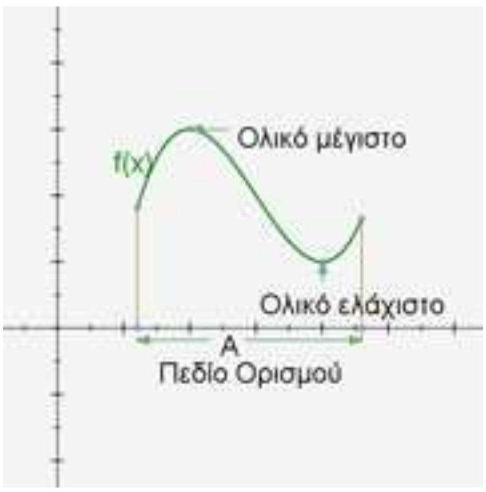
Ορισμός Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Ακρότατα, ελάχιστο - μέγιστο



Μέγιστο, ελάχιστο συνάρτησης.

Ορισμός Μια συναρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν :

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

Ορισμός Μια συναρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο** όταν :

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

Συμμετρίες, άρτια - περιττή

Ορισμός Μια συναρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Ορισμός Μια συναρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
2. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης
Σωστό ή Λάθος

1 Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι γνησίως αύξουσα. . . . . **Σ** **Λ**

2 Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x, τότε η $f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα. . . . . . **Σ** **Λ**

3 Το ολικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι μοναδικό. . . . . **Σ** **Λ**

4 Αν μια συνάρτηση είναι f περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε ισχύει ότι : $f(0) = 0$. . . . . **Σ** **Λ**

5 Η συνάρτηση $f(x) = (x + 2)^2$ είναι άρτια. . . . . **Σ** **Λ**

6 Μία περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων. . . . . **Σ** **Λ**

7 Αν $f(x), g(x)$ είναι άρτιες συναρτήσεις, τότε και η $f(x) + g(x)$ είναι άρτια. . . . . **Σ** **Λ**

6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 6.5.1 Να αποδείξετε με βάση τον ορισμό, ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Λύση 6.5.1 Θεωρώ $x_1, x_2 \geq 0$. Θα είναι τότε :

$$\begin{aligned}
& f(x_1) < f(x_2) \\
\Leftrightarrow\ & 2x_1^2 < 2x_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 < x_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 - x_2^2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 - x_2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 < x_2
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.2 Να αποδείξετε με βάση τον ορισμό, ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Λύση 6.5.2 Θεωρώ $x_1, x_2 \geq 1$. Θα είναι τότε :

$$\begin{aligned}
& f(x_1) < f(x_2) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1} < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}\right)\left(\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}\right) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{x_1 - 1}\right)^2 - \left(\sqrt{x_2 - 1}\right)^2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x_1 - 1) - (x_2 - 1) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 - 1 - x_2 + 1 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_1 < x_2
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.3 Να αποδείξετε με βάση τον ορισμό, ότι η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{3}{x}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Λύση 6.5.3 Θεωρώ $x_1, x_2 < 0$. Θα είναι τότε :

$$\begin{aligned} & f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{x_1} < -\frac{3}{x_2} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 < x_2 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.4 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3$$

είναι περιττή.

Λύση 6.5.4 Θα πρέπει να δείξω ότι $f(-x) = -f(x)$. Πραγματικά :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \\ &= 2(-x)^5 - 4(-x)^3 \\ &= -2x^5 + 4x^3 \\ &= -(2x^5 - 4x^3) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.5 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + 5x^2$$

είναι άρτια.

Λύση 6.5.5 Θα πρέπει να δείξω ότι $f(-x) = f(x)$. Πραγματικά :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \\ &= (-x)^4 + 5(-x)^2 \\ &= x^4 + 5x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.6 Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 7x + 10$$

είναι το $-\frac{9}{4}$.

Λύση 6.5.6 Θα πρέπει να δείξω ότι $f(x) \geq -\frac{9}{4}$. Είναι :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq -\frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 7x + 10 \geq -\frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 7x + 10 + \frac{9}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 7x + \frac{49}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \text{αληθής} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.5.7 Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6$$

είναι το $\frac{1}{4}$.

Λύση 6.5.7 Θα πρέπει να δείξω ότι $f(x) \leq \frac{1}{4}$. Είναι :

$$\begin{aligned} & f(x) \leq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 5x - 6 \leq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 5x - 6 - \frac{1}{4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 5x - \frac{25}{4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 5x + \frac{25}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \text{αληθής} \end{aligned}$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 6.5.8 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

1) $2x^3+1$ 2) $-5x^3-3x$

Άσκηση 6.5.9 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

1) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 2) $x-1-\dfrac{1}{x-1}$

3) $x+\dfrac{1}{x^2}$ 4) $\dfrac{x^3+1}{x}$

Άσκηση 6.5.10 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

1) $\sqrt{x}$ 2) $2+\sqrt{5-x}$

3) $\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ 4) $\dfrac{1}{x+1}-\sqrt{x+1}$

Άσκηση 6.5.11 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(2|\alpha|-1)x-3$$

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 6.5.12 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(\lambda^2-1)x+5$$

Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 6.5.13 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x)=(|\alpha|-1)x+\alpha$$

για τις διάφορες τιμές του α.

Άσκηση 6.5.14 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = (α^2 - 4)x^2 + (α - 2)x + 3$$

παριστάνει ευθεία και η f είναι γνησίως φθίνουσα να βρείτε το α.

Άσκηση 6.5.15 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α να δείξετε ότι η $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

Άσκηση 6.5.16 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και η g γνησίως φθίνουσα στο Α να δείξετε ότι η $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

Άσκηση 6.5.17 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in A$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

Άσκηση 6.5.18 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

1) $3x^4 - 2$

2) $2(x - 3)^2 - 5$

3) $-2x^6 + 3$

4) $3 - 5(x - 1)^2$

5) $2|x| - 1$

6) $\sqrt{x} + 3$

Άσκηση 6.5.19 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

1) $x^4 - 2x^2 + 1$

2) $x^2 - 4x + 4$

Άσκηση 6.5.20 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

1) $\frac{2}{x^2 + 5}$

2) $\frac{3}{|x| + 2}$

Άσκηση 6.5.21 Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

Άσκηση 6.5.22 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

1) $5x^6 - 2x^2 + 3$

2) $2x^5 - 3x^3 + x$

3) $x^3 - 3x|x| + 2x$

4) $|3x - 2| + |3x + 2|$

Άσκηση 6.5.23 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

1) $\dfrac{x^2 + |x|}{x}$

2) $\dfrac{x^3}{|x| - 1}$

3) $\dfrac{3|x| + 2}{x^3 - x}$

4) $\dfrac{x^3 - x|x|}{x^2 + 1}$

Άσκηση 6.5.24 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3|x| - 2}{x^{-1} - x}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

Άσκηση 6.5.25 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 1}{|x| - 3}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

Άσκηση 6.5.26 Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία Α(3, -2), Β(-3, λ) ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

Άσκηση 6.5.27 Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\alpha - 1)x + 5$ είναι άρτια να βρείτε το α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

Συνήθως χρησιμοποιούμε την έκφραση **μελέτη συναρτησης** για να εννοήσουμε ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε τα ακόλουθα :

1. Να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να προσδιορίσουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.
3. Να μελετήσουμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της ("οριακές τιμές" κτλ.).
4. Να συντάξουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση.

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2$

1. **Πεδίο ορισμού** Το πεδίο ορισμού είναι το R.
2. **Μονοτονία** Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ θεωρούμε τη διαφορά $\Delta = f(x_2) - f(x_1)$, για την οποία έχουμε

$$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = \alpha x_2^2 - \alpha x_1^2 = \alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

Έστω $\alpha > 0$ διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις

i. $0 \leq x_1 < x_2$ Τότε $(x_2 - x_1) > 0, (x_2 + x_1) > 0$ και $\alpha > 0$, άρα $\Delta > 0$. Επομένως $f(x_1) < f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η αx^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$.

ii. $x_1 < x_2 \leq 0$ Τότε $(x_2 - x_1) > 0, (x_2 + x_1) < 0$ και $\alpha > 0$, άρα $\Delta < 0$. Επομένως $f(x_1) > f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η αx^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο το 0. Πραγματικά

$$f(x) = \alpha x^2 \geq 0 = f(0)$$

Έστω $\alpha < 0$ θα είναι τότε

i. $0 \leq x_1 < x_2$ Τότε $(x_2 - x_1) > 0, (x_2 + x_1) > 0$ και $\alpha < 0$, άρα $\Delta < 0$. Επομένως $f(x_1) > f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η αx^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \infty)$.

ii. $x_1 < x_2 \leq 0$ Τότε $(x_2 - x_1) > 0, (x_2 + x_1) < 0$ και $\alpha < 0$, άρα $\Delta > 0$. Επομένως $f(x_1) < f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η αx^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο το 0. Πραγματικά

$$f(x) = \alpha x^2 \leq 0 = f(0)$$

3. **Συμμετρίες** Επειδή για κάθε $x \in R$ ισχύει

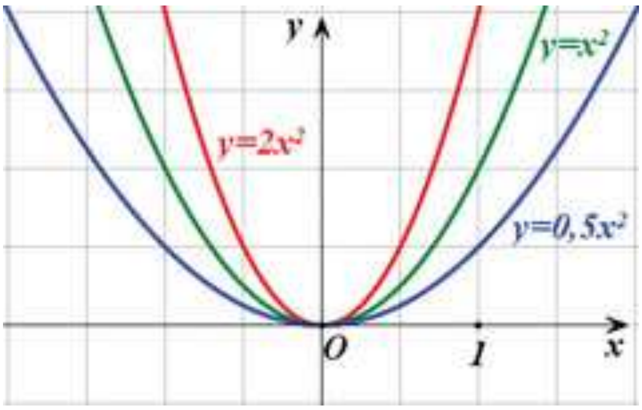
$$f(-x) = \alpha(-x)^2 = \alpha x^2 = f(x)$$

συμπεραίνουμε ότι η αx^2 είναι άρτια, δηλαδή συμμετρική ως προς τον $y'y$.

4. **Γραφική παράσταση** Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha = 2$. Κατασκευάζουμε πρώτα ένα πίνακα τιμών και με τη βοήθεια αυτού προχωρούμε κατόπιν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $2x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	18	8	2	0	2	8	18

Το παρακάτω σχήμα επιδεικνύει γραφικές παραστάσεις της αx^2 για μερικές θετικές τιμές του α. Για $\alpha < 0$ οι αντίστοιχες καμπύλες είναι προς τα κάτω.



Γραφική παράσταση για αx^2

Καμπύλες που προκύπτουν από συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x^2$ ή ακόμα γενικότερα της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι περισσότερο γνωστές με τό όνομα **παραβολές**.

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = αx^2$
Σωστό ή Λάθος

1 Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο $A(-2, -4)$ τότε είναι $α < 0$. . **Σ** **Λ**

2 Η γραφική παράσταση της $y = 2x^2$ βρίσκεται στο 1ο και 2ο τεταρτημόριο. . . **Σ** **Λ**

3 Η παραβολή $y = (x + 5)^2 - 1$ έχει ελάχιστο το -1. . . . . **Σ** **Λ**

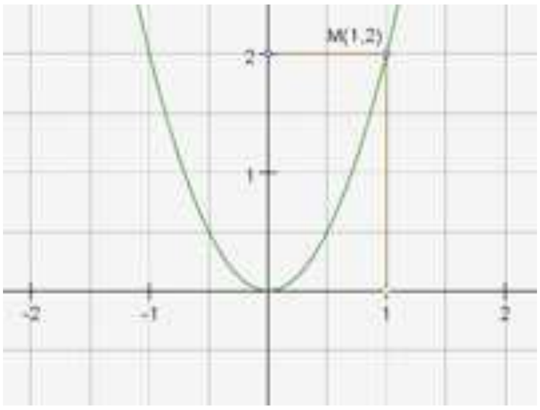
4 Η παραβολή $y = 3x^2 + 1$ είναι συνάρτηση άρτια. . . . . **Σ** **Λ**

5 Η ισότητα $y = (4 - x)(4 + x)$ παριστάνει παραβολή με μέγιστη τιμή το 16. . . **Σ** **Λ**

6 Από τα σημεία $A(-5, 5)$ και $B(5, 5)$ περνά μία και μόνο παραβολή. . . . . . **Σ** **Λ**

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = αx^2$
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 7.1.1 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του σχήματος.



Λύση 7.1.1 Επειδή είναι παραβολή με ελάχιστο $f(0) = 0$, θα έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = αx^2, α > 0$. Επειδή δε, διέρχεται από το $M(1, 2)$ θα επαληθεύεται από αυτό, δηλαδή

$$2 = α \cdot 1^2 \Leftrightarrow α = 2$$

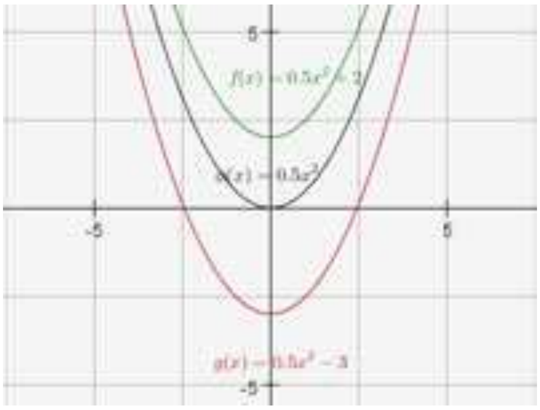
Άρα $f(x) = 2x^2$.

Άσκηση 7.1.2 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις κάτωθι συναρτήσεις

i) $\varphi(x) = 0{,}5x^2 \quad f(x) = 0{,}5x^2 + 2 \quad g(x) = 0{,}5x^2 - 3$

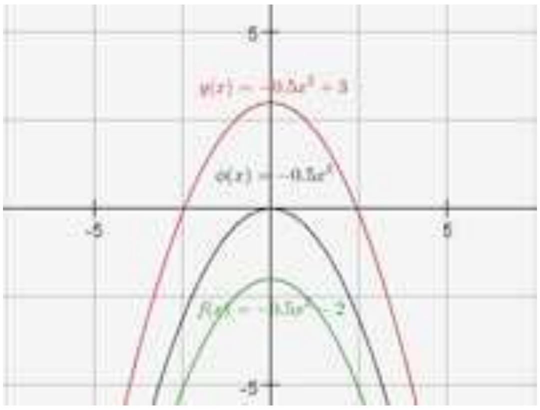
ii) $\varphi(x) = -0{,}5x^2 \quad f(x) = -0{,}5x^2 - 2 \quad g(x) = -0{,}5x^2 + 3$

Λύση 7.1.2



i) Έχουμε

- Η C_φ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_f προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ 2 μονάδες προς τα πάνω.
- Η C_g προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ 3 μονάδες προς τα κάτω.



ii) Έχουμε

- Η C_φ είναι γνωστή από τη θεωρία.
- Η C_f προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ 2 μονάδες προς τα κάτω.
- Η C_g προκύπτει από τη μετατόπιση της C_φ 3 μονάδες προς τα πάνω.

Άσκηση 7.1.3 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

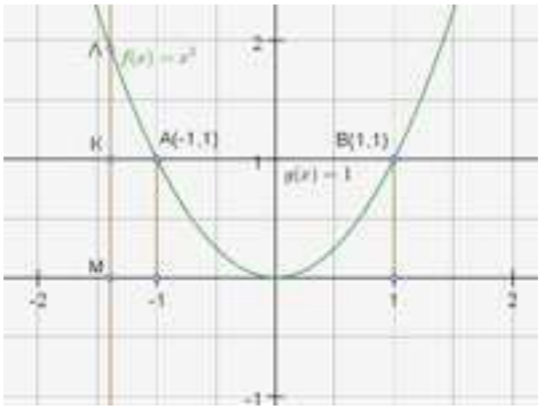
$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

i) Με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις

$$x^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Λύση 7.1.3



i) Οι τετμημένες των Α, Β είναι –1 και 1 αντίστοιχα. Από τυχαίο σημείο Μ του άξονα x′x, φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία, που τέμνει τη C_g στο Κ και τη C_f στο Λ. Τότε είναι

$$g(x) = (MK) = 1 \quad \text{και} \quad f(x) = (M\Lambda)$$

Η ανίσωση τότε $x^2 \leq 1$ γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} & x^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) \leq g(x) \\ \Leftrightarrow \quad & (M\Lambda) \leq (MK) \quad (1) \end{aligned}$$

Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει η (1) είναι $-1 \leq x \leq 1$. Παρόμοια, βλέπουμε ότι για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η $x^2 > 1$, θα πρέπει $(M\Lambda) > (MK)$ δηλαδή $x > 1$ ή $x < -1$.

ii) Αλγεβρική επιβεβαίωση

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

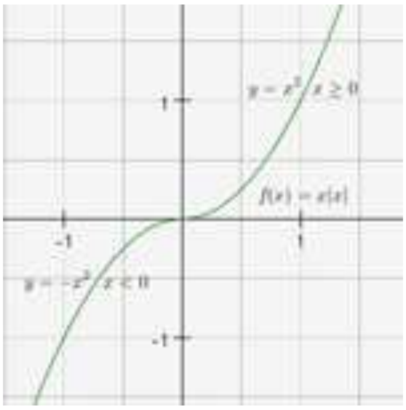
$$x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος
Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση 7.1.4 Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x|x|$$

Λύση 7.1.4



Η συνάρτηση γράφεται ισοδύναμα

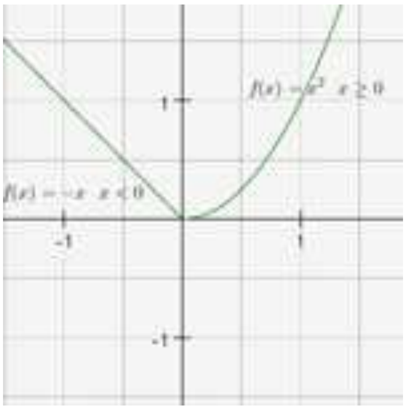
$$f(x) = \begin{cases} x(-x) = -x^2 & x < 0 \\ x \cdot x = x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 7.1.5 Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Λύση 7.1.5



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Άσκηση 7.1.6 Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = x \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = x^3 \quad \varphi(x = \sqrt{x}$$

στο διάστημα $[0, +\infty)$.

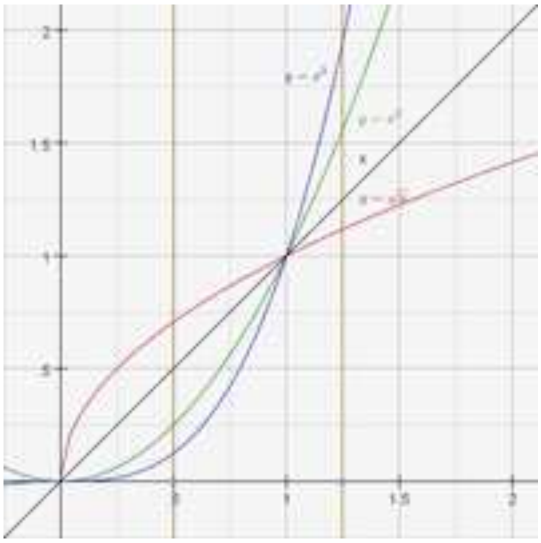
i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$ των συναρτήσεων f,g,h και φ.

  α) Για $0 < x < 1$

  b) Για $x > 1$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Λύση 7.1.6



i) Από το τυχαίο σημείο Μ του άξονα φανταζόμαστε κατακόρυφη $x'x$ ευθεία ε.

  α) Όταν είναι $0 < x < 1$, η ε διαδοχικά θα τμήσει τη $x^3, x^2, x, \sqrt{x}$. Άρα θα είναι

$$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$$

  α) Όταν είναι $x > 1$, η ε διαδοχικά θα τμήσει τη $\sqrt{x}, x, x^2, x^3$. Άρα θα είναι

$$\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$$

ii)

  α) Για $0 < x < 1$

$x^3 < x^2 \Leftrightarrow x < 1$ αληθής (διαιρέσαμε με x^2)

$x^2 < x \Leftrightarrow x < 1$ αληθής (διαιρέσαμε με x)

$x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x < 1$ αληθής (υψώσαμε στο τετράγωνο)

b) Για $x > 1$

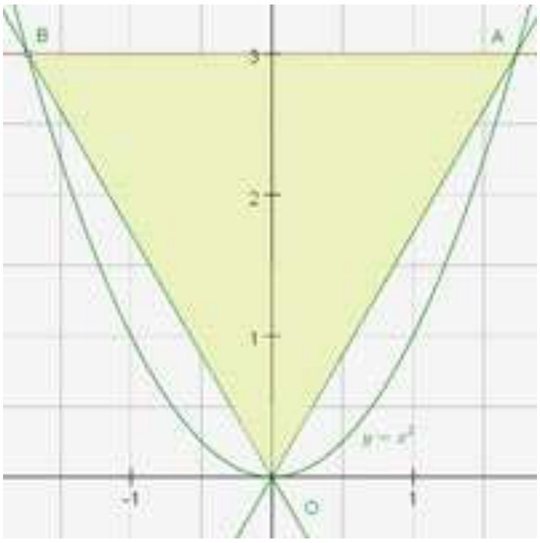
$x^3 < x^2 \Leftrightarrow x < 1$ αληθής (διαιρέσαμε με x^2)

$\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow$ αληθής

$x < x^2 \Leftrightarrow 1 < x$ αληθής

$x^2 < x^3 \Leftrightarrow 1 < x$ αληθής

Άσκηση 7.1.7 Στο κάτωθι σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου Α.



Λύση 7.1.7 Έστω $x > 0$ η τετμημένη του Α. Το σημείο Α θα έχει τότε συντεταγμένες (x, x^2) ενώ το Β θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$ και θα ισχύει

$$(AB) = (AO)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = \sqrt{x^2 + (x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 = x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2$
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 7.1.8 Να προσδιορίσετε το α ώστε η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση

$$f(x) = \alpha x^2$$

να διέρχεται από το (3, 4).

Άσκηση 7.1.9 Να προσδιορίσετε το α ώστε η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση

$$f(x) = \alpha x^2$$

να διέρχεται από το $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

Άσκηση 7.1.10 Να προσδιορίσετε το α ώστε η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση

$$f(x) = \alpha x^2$$

να διέρχεται από το $\left(1, \frac{3}{\alpha}\right)$.

Άσκηση 7.1.11 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των κάτωθι συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

Άσκηση 7.1.12 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των κάτωθι συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2}{5} \quad \text{και} \quad g(x) = -2x^2 + 8$$

7.2 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

1. **Πεδίο ορισμού** Το πεδίο ορισμού είναι το $R-\{0\}$.
2. **Μονοτονία** Έστω $x_1,x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ θεωρούμε τη διαφορά $\Delta = f(x_2)-f(x_1)$, για την οποία έχουμε

$$\Delta = f(x_2)-f(x_1) = \frac{\alpha}{x_2}-\frac{\alpha}{x_1} = \alpha\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$

Έστω $\alpha > 0$ διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις

i. $0 < x_1 < x_2$ Τότε $(x_1-x_2)<0,(x_1x_2)>0$ και $\alpha>0$, άρα $\Delta<0$. Επομένως $f(x_1)>f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\alpha}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$.

ii. $x_1 < x_2 < 0$ Τότε $(x_1-x_2)<0,(x_1x_2)>0$ και $\alpha>0$, άρα $\Delta<0$. Επομένως $f(x_1)>f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\alpha}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Έστω $\alpha < 0$ θα είναι τότε

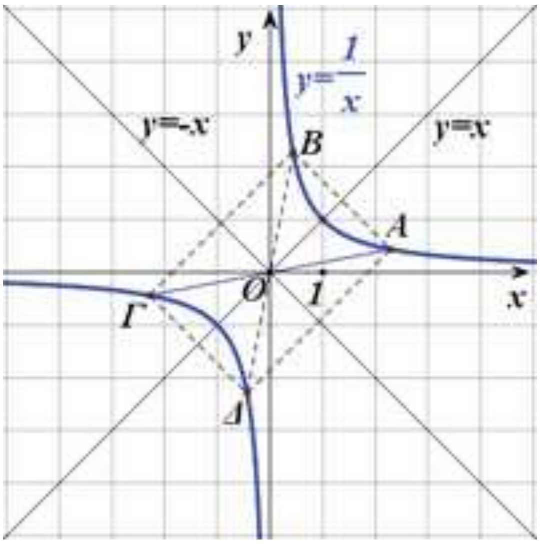
i. $0 < x_1 < x_2$ Τότε $(x_1-x_2)<0,(x_1x_2)>0$ και $\alpha<0$, άρα $\Delta>0$. Επομένως $f(x_1)<f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\alpha}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$.

ii. $x_1 < x_2 < 0$ Τότε $(x_1-x_2)<0,(x_1x_2)>0$ και $\alpha<0$, άρα $\Delta>0$. Επομένως $f(x_1)<f(x_2)$ και συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\alpha}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

3. **Συμμετρίες** Επειδή για κάθε $x \in R-\{0\}$ ισχύει

$$f(-x) = \frac{\alpha}{-x} = -\frac{\alpha}{x} = -f(x)$$

συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\alpha}{x}$ είναι περιττή.



Γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$

4. **Γραφική παράσταση** Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha = 1$.

Κατασκευάζουμε πρώτα ένα πίνακα τιμών και με τη βοήθεια αυτού προχωρούμε κατόπιν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\frac{1}{x}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

x	-2	-1	-1/2	1/2	1	2
f(x)	-1/2	-1	-2	2	1	1/2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha \neq 0$, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή**.

7.2 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Σωστό ή Λάθος

1 Η εξίσωση xy = 7 παριστάνει μια υπερβολή. . . . . **Σ Λ**

2 Η γραφική παράσταση της $y = -\frac{2}{x}$ βρίσκεται στο $1^{ο}$ και $3^{ο}$ τεταρτημόριο. . . **Σ Λ**

3 Η υπερβολή $y = \frac{4}{x}$ είναι συνάρτηση περιττή. . . . . **Σ Λ**

4 Οι υπερβολές $y = \frac{1}{x}$ και $y = \frac{3}{x}$ τέμνονται. **Σ Λ**

7.2 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Ασκήσεις Λυμένες

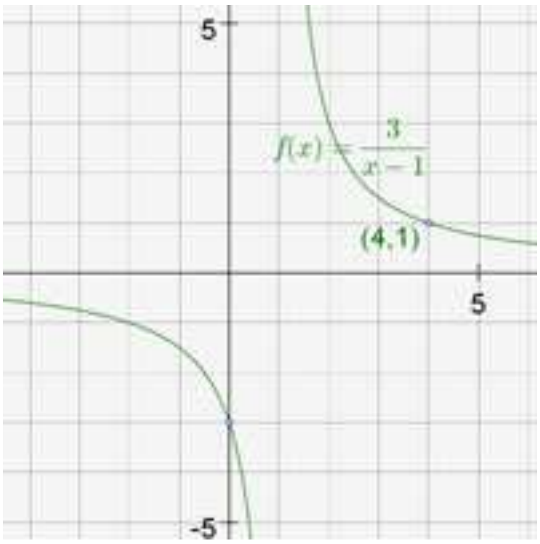
Άσκηση 7.2.1 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - 1}$$

να προσδιορίσετε το α ώστε η η γραφική παράσταση C_f να διέρχεται από το σημείο Μ(4, 1).

Λύση 7.2.1 Το σημείο Μ(4, 1) την επαληθεύει άρα

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{\alpha}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & 1 = \frac{\alpha}{4-1} \\ \Leftrightarrow\ & 1 = \frac{\alpha}{4-1} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = 3 \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{3}{x-1} \end{aligned}$$



Άσκηση 7.2.2 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Κ, όπου

$$f(x) = \frac{\alpha^2 + 6}{x} \quad \text{και} \quad K = (\alpha, 5)$$

i) Να βρείτε τον αριθμό α.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

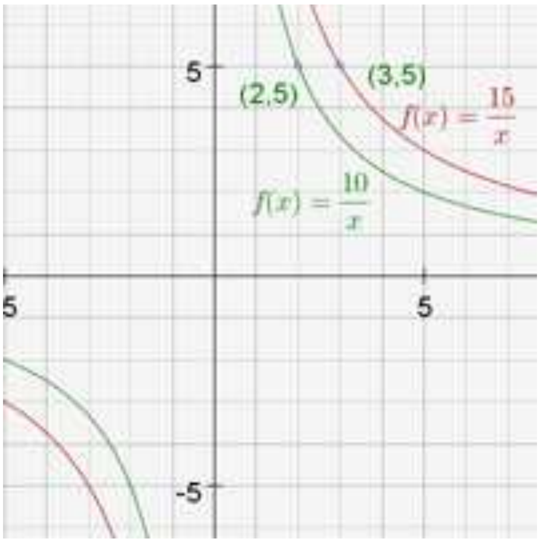
Λύση 7.2.2 Εφόσον οι συντεταγμένες του σημείου Κ επαληθεύουν την εξίσωση, θα ισχύει

$$f(x) = \frac{\alpha^2+6}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 = \frac{\alpha^2+6}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \quad 5\alpha = \alpha^2+6$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\alpha-2)(\alpha-3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = 3$$

άρα

$$f(x) = \frac{2^2+6}{x} = \frac{10}{x} \quad \text{ή} \quad f(x) = \frac{3^2+6}{x} = \frac{15}{x}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα



Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

7.2 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 7.2.3 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{αν } x \le -1 \\ 2 & \text{αν } -1 < x,1 \\ \frac{2}{x} & \text{αν } x \ge 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:
  i) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
  ii) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Άσκηση 7.2.4 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Κ, όπου

$$f(x) = \frac{2-\alpha}{x} \quad \text{και} \quad K = \left(\alpha,\ -\frac{1}{2}\right)$$

i) Να βρείτε τον αριθμό α.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.2.5 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Μ, όπου

$$f(x) = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 4}{x} \quad \text{και} \quad M = (-1, \alpha)$$

α) Να βρείτε τον αριθμό α.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.2.6 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in R$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i) $f(x) = \frac{3\mu + 6}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
ii) $f(x) = \frac{\mu^2 - 9}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
iii) $f(x) = \frac{\mu^2 - 2\mu - 8}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Άσκηση 7.2.7 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{αx + α - 3}{x - 1}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(2, 3).
α) Να βρείτε την τιμή του α.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.2.8 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x + α}{x}$$

όπου $α \neq -4$, για την οποία ισχύει f(f(2)) = 3.
i) Να βρείτε τον αριθμό α.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

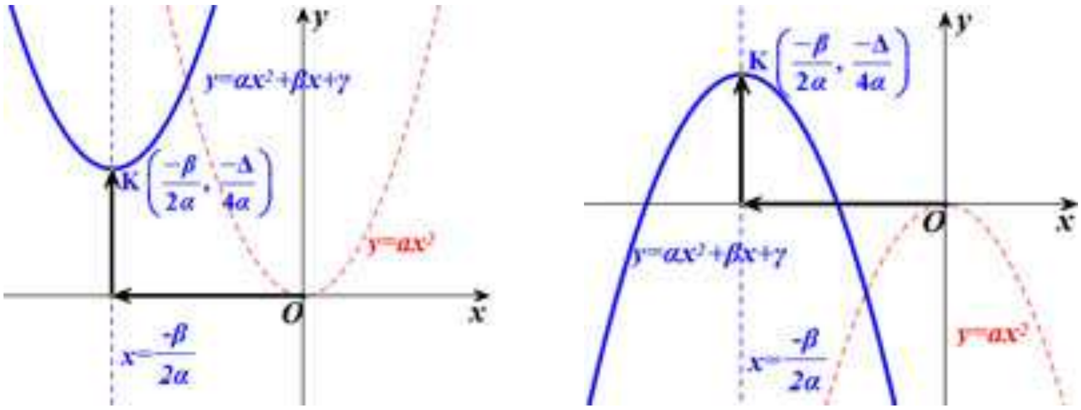
Όπως έχουμε δείξει, η f(x) μετασχηματίζεται ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right) \\ &= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη όσα έχουν ειπωθεί περί μετατόπισης μιας καμπύλης, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης προκύπτει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \alpha x^2$$

αν την μετατοπίσουμε $\frac{\beta}{2\alpha}$ μονάδες οριζόντια και $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ μονάδες κατακόρυφα. Συνεπώς είναι μια παραβολή που έχει κορυφή το σημείο $K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.



Γραφική παράσταση της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ για $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$.

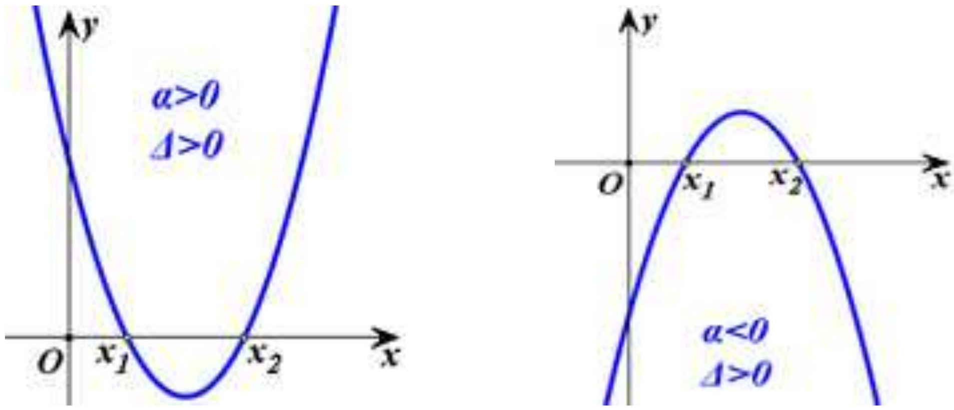
Μεταφράζοντας κατάλληλα τα συμπεράσματα από την μελέτη της $y = \alpha x^2$, έχουμε για την $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ότι :

1) Αν $\alpha > 0$
   - Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, \infty\right)$
   - Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

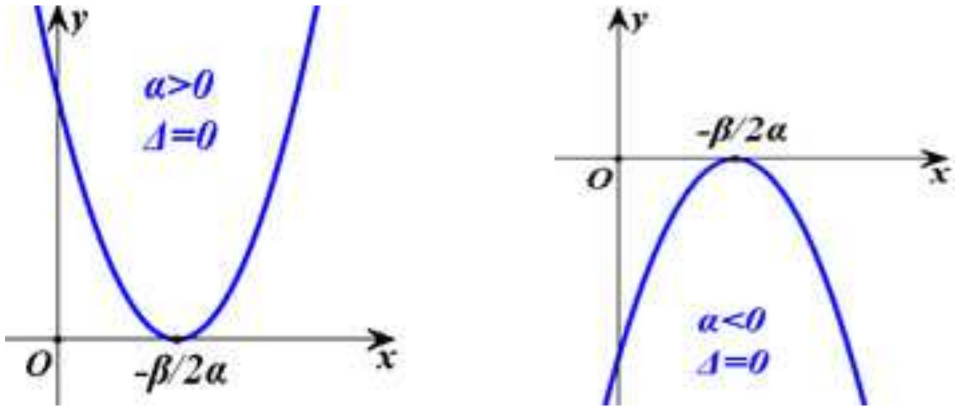
2) Αν $\alpha < 0$
   - Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, \infty\right)$

- Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

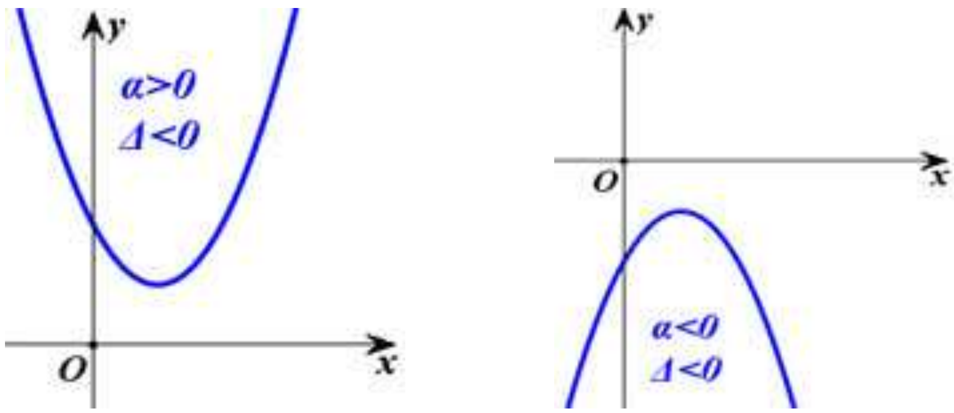
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατα περίπτωση στα παρακάτω σχήματα :



Γραφική παράσταση τριωνύμου με Δ > 0 και α > 0 ή α < 0.



Γραφική παράσταση τριωνύμου με Δ = 0 και α > 0 ή α < 0.



Γραφική παράσταση τριωνύμου με Δ < 0 και α > 0 ή α < 0.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Σωστό ή Λάθος

1 Η παραβολή $x^2 - 7x - 13$ παρουσιάζει μέγιστο. . . . . **Σ Λ**

2 Η παραβολή $x^2 + 2x + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο. . . . . **Σ Λ**

3 Η παραβολή $(x - 3)^2 + 4$ έχει κορυφή το σημείο Κ(3, 4). . . . . **Σ Λ**

4 Η παραβολή $x^2 - 4x + 1$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, –3). . . . . **Σ Λ**

5 Η παραβολή $x^2 + 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$. . . . . **Σ Λ**

6 Η παραβολή $(x - 1)^2 - 4$ έχει ελάχιστο το -4. . . . . **Σ Λ**

7 Η παραβολή $-(x - 1)^2 - 2$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$. . . . . . **Σ Λ**

8 Η παραβολή $(x + 3)^2 - 7$ έχει παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -3$. . . . . **Σ Λ**

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Ασκήσεις Λυμένες

Άσκηση 7.3.1 Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής

$$f(x) = \frac{3}{7}x^2 - \sqrt{2}x + 7$$

Λύση 7.3.1 Η παραβολή έχει :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{3}{7} \cdot 7 = -10$$

$$K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, \frac{10 \cdot 7}{4 \cdot 3}\right) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{70}{12}\right)$$

ενώ άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία

$$x = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

Άσκηση 7.3.2 Να εξετάσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = -x^2 + 5x - 2$$

Λύση 7.3.2 Επειδή α < 0, η f παρουσιάζει μέγιστο στο

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{5}{2\cdot(-1)} = \frac{5}{2}$$

Σε αυτό το σημείο

$$y = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5\frac{5}{2} - 2 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 2 = \frac{17}{4}$$

Όσον αφορα τη μονοτονία η f είναι αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και φθίνουσα στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Άσκηση 7.3.3 Να εξετάσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = 3x^2 + 7x - 1$$

Λύση 7.3.3 Επειδή α > 0, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{7}{2\cdot 3} = -\frac{7}{6}$$

Σε αυτό το σημείο

$$y = f\left(-\frac{7}{6}\right) = 3\left(-\frac{7}{6}\right)^2 + 7\left(-\frac{7}{6}\right) - 1 = 3\frac{49}{36} - \frac{49}{6} - 1 = -\frac{61}{12}$$

Όσον αφορα τη μονοτονία η f είναι φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right]$ και αύξουσα στο $\left[-\frac{7}{6}, +\infty\right)$.

Άσκηση 7.3.4 Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = 2x^2 - 6x + 3 \quad \text{και} \quad \text{ii) } g(x) = -3x^2 - 5x + 2$$

Λύση 7.3.4 Θα είναι

$$f_{min} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{(-6)^2 - 4\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 2} = -\frac{36 - 24}{8} = -\frac{3}{2}$$

$$f_{max} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{(-5)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 2}{4\cdot(-3)} = -\frac{25 + 24}{-12} = \frac{49}{12}$$

Άσκηση 7.3.5

i) Να γράψετε τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

στη μορφή $f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα συμπέσει με τη γραφική $g(x) = 2x^2$ παράσταση της f.

ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 9$$

θεωρώντας ως g την $g(x) = -2x^2$.

Λύση 7.3.5

i) Από τη θεωρία είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ &= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$$

$$\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{16 - 40}{8} = -3$$

άρα

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$$

που σημαίνει οριζόντια μετατόπιση της C_g 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες πάνω.

ii) Για τη δεύτερη συνάρτηση είναι

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{8}{2 \cdot (-2)} = -2$$

$$\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9)}{4 \cdot (-2)} = \frac{64 - 72}{-8} = 1$$

άρα

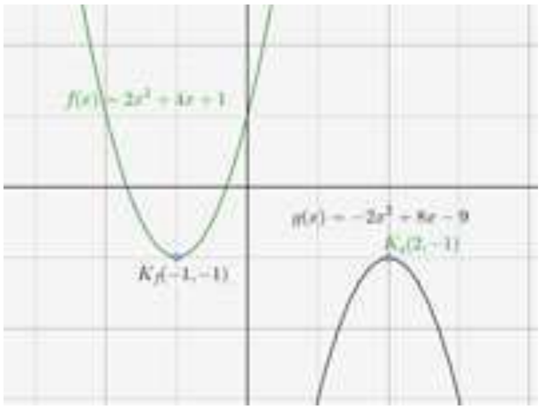
$$f(x) = -2(x - 2)^2 - 1$$

που σημαίνει οριζόντια μετατόπιση της C_g 2 μονάδες δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα κάτω.

Άσκηση 7.3.6 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$\text{i) } f(x) = 2x^2 + 4x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -2x^2 + 8x - 9$$

Λύση 7.3.6



i) Η παραβολή έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,\ +\infty)$, ενώ είναι :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8$$

$$K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right) = \left(-\frac{4}{2 \cdot 2},\ -\frac{8}{4 \cdot 2}\right) = \left(-1,\ -1\right)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ +\infty)$, έχει ελάχιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -1$, ενώ άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = -1$.

ii) Η παραβολή έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,\ +\infty)$, ενώ είναι :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 64 - 72 = -8$$

$$K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right) = \left(-\frac{8}{2 \cdot (-2)},\ -\frac{(-8)}{4 \cdot (-2)}\right) = \left(2,\ -1\right)$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[2,\ +\infty)$, έχει μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = -1$, ενώ άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = 2$.

Άσκηση 7.3.7 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Λύση 7.3.7

1. Με τον x′x. Έχουμε y = 0 οπότε :

$$-3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-3)} = \frac{-2 \pm 4}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα η C_f τέμνει τον x′x στα σημεία $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ και (1, 0).

2. Με τον y′y. Έχουμε x = 0 οπότε :

$$y = -3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Άρα η C_f τέμνει τον y′y στο σημείο (0, 1).

Άσκηση 7.3.8 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει για κορυφή το σημείο Κ(2, 3) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση 7.3.8 Εφόσον η παραβολή έχει για κορυφή το Κ(2, 3) θα έχει τη μορφή :

$$y = α(x-2)^2 + 3$$

Το σημείο (0, 0) όμως την επαληθεύει, άρα

$$0 = α(0-2)^2 + 3 \Leftrightarrow 4α = -3 \Leftrightarrow α = -\frac{3}{4}$$

οπότε η ζητούμενη παραβολή είναι

$$y = -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 3$$

Άσκηση 7.3.9 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (3κ^2 - 2κ + 5)x + (7λ^2 - 2λ + 1) = 0$$

Να βρείτε τα κ, λ ώστε το άθροισμα των ριζών να γίνεται μέγιστο και το γινόμενο των ριζών ελάχιστο.

Λύση 7.3.9 Το άθροισμα των ριζών ισούται με

$$S = -\frac{β}{α} = -3κ^2 + 2κ - 5$$

Το S παρατηρούμε ότι είναι ένα τριώνυμο με α = –3 < 0. Άρα παρουσιάζει μέγιστο για

$$κ = -\frac{β}{2α} = -\frac{2}{2 \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$$

Δηλαδή για $κ = \frac{1}{3}$ το άθροισμα των ριζών γίνεται μέγιστο.

Το γινόμενο των ριζών ισούται με

$$P = \frac{γ}{α} = 7λ^2 - 2λ + 1$$

Το P παρατηρούμε ότι είναι ένα τριώνυμο με α = 7 > 0. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο για

$$\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot 7} = \frac{1}{7}$$

Δηλαδή για $\lambda = \frac{1}{7}$ το γινόμενο των ριζών γίνεται ελάχιστο.

Άσκηση 7.3.10 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3(x-\lambda)^2 - \lambda^2 + 1$$

Να προσδιορίσετε το λ το οποίο μεγιστοποιεί το ελάχιστο της f.

Λύση 7.3.10 Η f είναι ένα τριώνυμο (παραβολή) και επειδή α = 3 > 0 παρουσιάζει ελάχιστο στο

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\lambda^2 + 1$$

Κατά σειρά, η $g(\lambda) = -\lambda^2 + 1$ είναι παραβολή, και επειδή α = –1 < 0 παρουσιάζει μέγιστο στο

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = 1$$

Δηλαδή η τιμή λ = 1 μεγιστοποιεί το ελάχιστο της f.

Άσκηση 7.3.11 Να αποδείξετε ότι αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι σταθερό, το γινόμενο τους γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί γίνονται ίσοι.

Λύση 7.3.11 Έστω x και y οι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει

$$x + y = c$$

Ζητάμε να βρούμε πότε το xy γίνεται μέγιστο. Δηλαδή, ζητάμε να βρούμε το μέγιστο της παράστασης

$$xy = x(c-x) = -x^2 + cx$$

Η παράσταση είναι μια παραβολή για την οποία γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει μέγιστο (επειδή α=-1<0) στο σημείο

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{c}{2(-1)} = \frac{c}{2}$$

τότε

$$y = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 7.3.12 Δίνεται η παραβολή

$$f(x) = x^2 + (\kappa + 2)x + \kappa + 2$$

Να βρείτε το κ κάθε φορά στις περιπτώσεις που η παραβολή

1. εφάπτεται στον x′x.
2. τέμνει τον x′x σε δύο σημεία.
3. δεν τέμνει τον x′x.
4. έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 3.
5. παρουσιάζει ελάχιστο για x = 5.
6. έχει ελάχιστο το −8.
7. τέμνει τον x′x στο A(3, 0).
8. τέμνει τον y′y στο B(0, 5).

Λύση 7.3.12 Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\kappa + 2)^2 - 4(\kappa + 2) = \kappa^2 + 4\kappa + 4 - 4\kappa - 8 = \kappa^2 - 4$$

1. Θα είναι Δ = 0. Αρα
$$\kappa^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 = 2 \Leftrightarrow \kappa = \pm 2$$
2. Θα είναι Δ > 0. Αρα
$$\kappa^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > 2^2 \Leftrightarrow |\kappa|^2 > 2^2 \Leftrightarrow |\kappa| > 2 \Leftrightarrow \kappa > 2 \text{ ή } \kappa < -2$$
3. Θα είναι Δ < 0. Αρα
$$\kappa^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \kappa^2 < 2^2 \Leftrightarrow |\kappa|^2 < 2^2 \Leftrightarrow |\kappa| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa < 2$$
4. Η κορυφή της παραβολής θα έχει τετμημένη το −3. Αρα
$$3 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\kappa + 2}{2} \Leftrightarrow \kappa + 2 = -6 \Leftrightarrow \kappa = -8$$
5. Θα πρέπει
$$5 = -\frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow 5 = -\frac{\kappa + 2}{2} \Leftrightarrow \kappa + 2 = -10 \Leftrightarrow \kappa = -12$$
6. Θα πρέπει
$$-8 = -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow -8 = -\frac{\kappa^2 - 4}{4} \Leftrightarrow \kappa^2 = 36 \Leftrightarrow \kappa = \pm 6$$
7. Θα πρέπει
$$3^2 + 3(\kappa + 2) + \kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow 4(\kappa + 2) = -9 \Leftrightarrow 4\kappa = -9 - 8 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{17}{4}$$
8. Θα πρέπει
$$0^2 + 0(\kappa + 2) + \kappa + 2 = 5 \Leftrightarrow \kappa + 2 = 5 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Άσκηση 7.3.13 Δίνεται η παραβολή

$$f(x) = x^2 + (\kappa + 1)x + \kappa$$

Να βρείτε το κ κάθε φορά στις περιπτώσεις που η παραβολή

1. εφάπτεται στον x′x.
2. έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 3.
3. Η κορυφή έχει τεταγμένη −4. Ποια είναι τότε η τετμημένη της;

Λύση 7.3.13 Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\kappa + 1)^2 - 4\kappa = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - 4\kappa = \kappa^2 - 2\kappa + 1 = (\kappa - 1)^2$$

1. Θα είναι Δ = 0. Αρα

$$(\kappa - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

2. Έχει άξονα συμμετρίας τον x′x. Τότε

$$0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\kappa + 1}{2} \Leftrightarrow -\kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1$$

3. Η κορυφή έχει τεταγμένη −4

$$-4 = -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow -4 = -\frac{(\kappa - 1)^2}{4} \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \kappa - 1 = \pm 4 \Leftrightarrow \kappa = -3 \text{ ή } \kappa = 5$$

Άσκηση 7.3.14 Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20μ.

i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο E = f(x) που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

Λύση 7.3.14

i) Έχουμε

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad \text{με } 0 < x < 10$$

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x \quad \text{με } 0 < x < 10$

ii) Επειδή α = –1 < 0, το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 10x$ θα έχει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$$

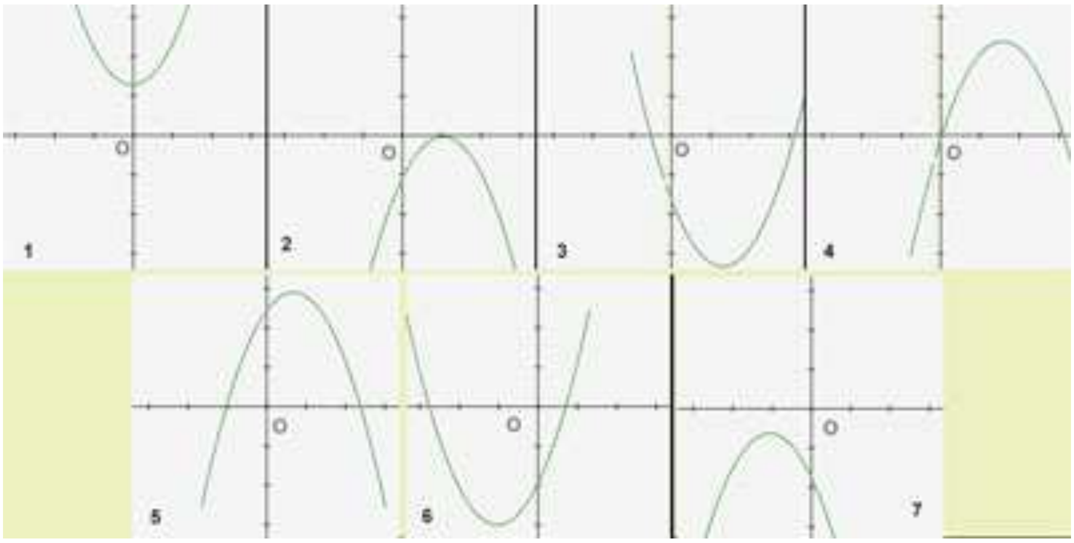
και αυτό θα είναι

$$f_{max} = f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = -25 + 50 = 25$$

Άσκηση 7.3.15 Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Λύση 7.3.15 Διαβάζοντας κατάλληλα τις γραφικές παραστάσεις κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	-	+	-	-	+	-
β	0	+	-	+	+	+	-
γ	+	-	-	0	+	-	-
Δ	-	0	+	+	+	+	-

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Άσκηση 7.3.16 Στο παρακείμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x) = αx^2 + βx + γ$. Να βρείτε :

i) Το πρόσημο του α.
ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και
iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι β = 6.

Λύση 7.3.16

i) Θα είναι $α < 0$ αφού το τριώνυμο έχει μέγιστο.
ii) Θα είναι $Δ > 0$ αφού το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες (1 και 5).
iii) Έχουμε

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow α \cdot 1^2 + β \cdot 1 + γ = 0$$
$$\Leftrightarrow α + 6 + γ = 0$$
$$\Leftrightarrow γ = -α - 6$$

$$P(5) = 0 \Leftrightarrow α \cdot 5^2 + β \cdot 5 + γ = 0$$
$$\Leftrightarrow 25α + 30 + γ = 0$$
$$\Leftrightarrow 25α + 30 - α - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 24α = -24 \Leftrightarrow α = -1$$

και τότε $γ = -α - 6 = 1 - 6 = -5$

Δηλαδή το τριώνυμο είναι $-x^2 + 6x - 5$.

Άσκηση 7.3.17 Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20μ.

i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο $E = f(x)$ που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x.
ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

Λύση 7.3.17

i)

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad \text{με} \quad 0 < x < 10$$

άρα

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x \quad 0 < x < 10$$

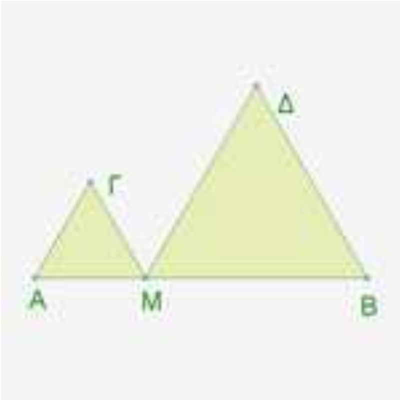
ii) Επειδή $α = -1 < 0$ το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 10x$ έχει μέγιστο για

$$x = -\frac{β}{2α} = -\frac{10}{2 \cdot (-1)} = 5$$

τότε

$$f_{max} = f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = -25 + 50 = 25$$

Άσκηση 7.3.18 Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



Λύση 7.3.18 Έστω (ΑΜ) = x, τότε (ΜΒ) = 6–x και

$$\begin{aligned}(\Gamma AM)+(\Delta MB) &= \frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{(6-x)^2\sqrt{3}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+(6-x)^2)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+36-12x+x^2)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2+36-12x)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-6x+18)\end{aligned}$$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση

$$E(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-6x+18) \quad 0<x<6$$

που εκφράζει το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων συναρτήσει του x. Επειδή $\alpha = 1 > 0$ θα παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{-6}{2\cdot 1}=3$$

Επομένως η ζητούμενη θέση του Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Ασκήσεις Άλυτες

Άσκηση 7.3.19 Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή των παραβολών:

1) $x^2 + 4x - 2$

2) $-x^2 + 6x - 4$

3) $-2x^2 + 3$

4) $-4x^2 + 4x - 1$

Άσκηση 7.3.20 Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή των παραβολών:

1) $x^2 - 2x - 3$

2) $-x^2 - 4x + 2$

3) $2x^2 + 4x + 3$

4) $-3x^2$

5) $-x^2 + 6x - 9$

6) $9x^2 - 12x + 4$

Άσκηση 7.3.21 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.22 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.23 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.24 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x^2 + 2x - 4$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.25 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 8$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.26 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 7.3.27 Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

1) $x^2 - 4x + 3$ 2) $-x^2 + 4$

3) $x^2 + 2x + 3$ 4) $-x^2 + 4x - 5$

5) $2x^2 + 4x + 2$ 6) $-x^2 + 6x - 9$

Άσκηση 7.3.28 Η παραβολή

$$f(x) = x^2 + βx + γ$$

έχει κορυφή το σημείο K(3, $-$4). Να βρείτε :

i) τους αριθμούς β και γ.
ii) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Άσκηση 7.3.29 Η παραβολή

$$f(x) = λx^2 + (λ + 2)x - 2(2λ - 1)$$

έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = $-$1.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
iii) Να λύσετε την ανίσωση f(x) > 10.

Άσκηση 7.3.30 Η παραβολή

$$f(x) = λx^2 + (λ + 3)x + 1 - λ$$

έχει άξονα συμμετρίας τον y′y. Να βρείτε

i) τον αριθμό λ
ii) την κορυφή της παραβολής.

Άσκηση 7.3.31 Να βρείτε για ποιες τιμές του $λ \in R$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = λx^2 + 4x + λ + 3$$

είναι παραβολή που τέμνει τον x′x σε δύο σημεία.

Άσκηση 7.3.32 Να βρείτε για ποιες τιμές του $λ \in R$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = (λ^2 - 3λ - 4)x^2 - 5x + 2$$

είναι παραβολή η οποία παρουσιάζει μέγιστο.

Άσκηση 7.3.33 Να βρείτε για ποιες τιμές του $λ \in R$, η παραβολή :

$$f(x) = 3x^2 + (λ^2 - 4λ - 12)x - 5$$

έχει κορυφή με αρνητική τετμημένη.

Άσκηση 7.3.34 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3\lambda - 5$$

είναι παραβολή η οποία παρουσιάζει ελάχιστο και τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Άσκηση 7.3.35 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$, η κορυφή της παραβολής :

$$f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda + 1$$

είναι σημείο.

i) του άξονα $x'x$.

ii) του άξονα $y'y$.

Άσκηση 7.3.36 Η παραβολή

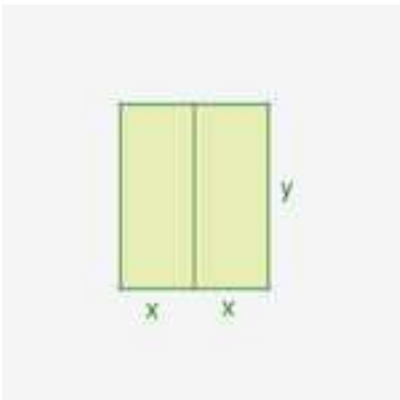
$$f(x) = \alpha x^2 - 3\alpha x + 13$$

έχει κορυφή με τεταγμένη α.

i) Να βρείτε τον αριθμό α.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Άσκηση 7.3.37 Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ 2014

Άσκηση GI.A.ALG.2.474 Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών:

$$1,3,5,7,\cdots$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (αν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.477 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.478 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in R$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.480 Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^{η} σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.481 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

(Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.483

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α,β με α < β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.484

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.485 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in R:$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.486 Αν 0 < α < 1, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: (Μονάδες 12)

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει:
$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x,y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.488 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : (Μονάδες 10)

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.489

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.490 Δίνεται το τριώνυμο

$$2x^2-3x+1$$

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in R$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.491 Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x-1<x+9 \text{ και } 2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.492 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.493

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.495 Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.496 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

(Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.497 Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ : Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.498

α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$$

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος. (Μονάδες7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.499 Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α : «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β : «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A\cup B$ ii) $A\cap B$ iii) $B-A$ iv) A'

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.503

α) Να λύσετε την ανίσωση: (Μονάδες 9)

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.504

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: (Μονάδες 15)

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$$

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: (Μονάδες 10)

$$|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.505

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.506 Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.507 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in R$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.508

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\cdots\nu$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

(Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.509

α) Αν $\alpha,\beta \in R - 0$, να αποδειχθεί ότι: (Μονάδες 15)

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$$

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.510 Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)
β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 8)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.936 Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.938
α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $3 < \sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.944 Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
β) Για $x = 5$,να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.947 Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)
β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.950 Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.952 Δίνεται η παράσταση:

$$B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.955 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (\sqrt{2})^6 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt[3]{2})^6$$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: (Μονάδες 12)

$$\sqrt{2}, \quad 1, \quad \sqrt[3]{2},$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.991 Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3; 1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$$

είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.996 Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.999

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: (Μονάδες 8)

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1003 Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ
Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ
Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:
i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,
ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1005 Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{1+x}{x-1} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{x^2 - x}$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α,Β πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει Α = Β. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1007

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: (Μονάδες 10)

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x-2}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1009 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |3x - 6| + 2$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι
i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$
ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: (Μονάδες 13)

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1015 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$ με όρους $α_2 = 0$, $α_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $ω = 2$ και $α_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και $α_1$ ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $α_ν = 2ν - 4$, $ν \in N$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1024 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = αx + β$$

όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(−1,4), να βρείτε τις τιμές των α,β. (Μονάδες 13)

β) Αν $α = 1$ και $β = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1032

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί:

$$x, \quad 2x + 1, \quad 5x + 4$$

με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$ (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1039

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1042 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$ (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in R$, ώστε: $f(x) = 0$ (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1050

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί :

$$x+2, \quad (x+1)^2, \quad 3x+2$$

με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν
i) $x = 1$
ii) $x = -1$. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1055 Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1057 Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1062

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1064 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1067 Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)
β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1070 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ,δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: (Μονάδες 15)

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1074
α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : (Μονάδες 12)

$$|y - 3| < 1$$

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1 < x < 3 \quad \text{και} \quad 2 < y < 4$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$6 < \Pi < 14$$

όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1077
α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$. (Μονάδες 10)
β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$$

(Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1080 Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$. (Μονάδες 12)
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης; (Μονάδες 13)

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1082 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)
β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1086 Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).
α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)
β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),
  i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)
  ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1088
α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)
β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)
γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1089 Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,
α) να γράψετε τις παραστάσεις $x - 5$ και $x - 10$ χωρίς απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)
β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (Μονάδες 15)

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1090 Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο

$$M(\alpha, \frac{1}{8})$$

να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1091 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

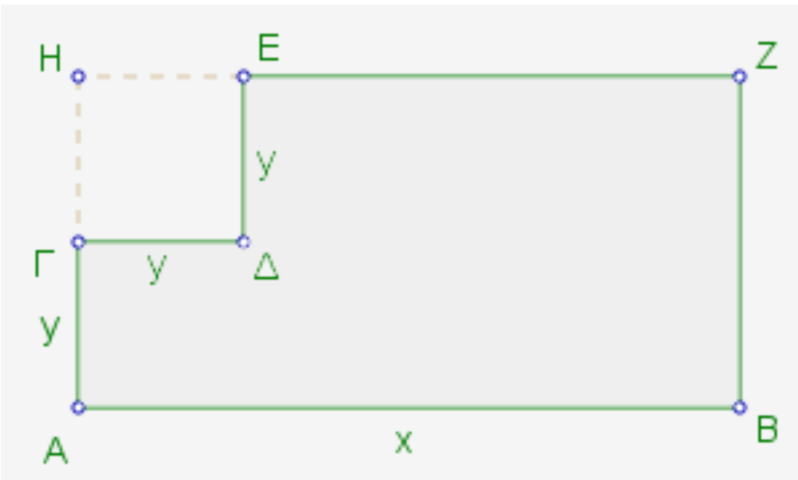
α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1092 Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

(Μονάδες 10)



Σχήμα 2.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1093 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$$

α) Να δείξετε ότι:
   i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)
   ii) $A - B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1096 Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0{,}8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1097 Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in R$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. (Μονάδες 12)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1100 Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1101 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in R$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1102 Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(A - B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$ (Μονάδες 9)

β)

i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β» . (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1273 Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4$$

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1275 Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: (Μονάδες 9)

$$x_1 + x_2, \quad x_1 \cdot x_2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\frac{1}{x_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_2}$$

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1276 Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1277 Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2):

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1278 Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1281 Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: (Μονάδες 12)

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1282

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2 - 2x - 1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)| = 1$ (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1283

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1287 Δίνεται ο πίνακας:

0	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)
Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)
Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1288

α) Να λύσετε την ανίσωση: (Μονάδες 12)

$$x^2 - 10x + 21 < 0$$

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$$

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: (Μονάδες 8)

$$A = -x^2 + 11x - 24$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1293 Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (^oC), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 - x, \quad \text{όταν} \quad 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290^oC. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440^oC;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1297

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$$

είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1298 Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha - \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1300 Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$$

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \quad \text{και} \quad \sqrt[6]{6}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1301 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1302 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{αν} \quad x < 0 \\ 2x + 5 & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1305
α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$ (Μονάδες 12)
β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1506 Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1,2,4,5\}$ και $B = \{2,4,6\}$.
α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω, τα σύνολα Α και Β. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' και B'. (Μονάδες 13)
β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. (Μονάδες 4)
(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β. (Μονάδες 4)
(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β. (Μονάδες 4)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1509 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$.
α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1,να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)
β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1512
α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (Μονάδες 8)
β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)
γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1513 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.
α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1520 Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο
Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:
α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1529 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = αx + β \quad με \quad α,β \in R$$

για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $α = -2$ και $β = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1532 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1533 Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + λ - 2 = 0$, με παράμετρο $λ \in R$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1,x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: (Μονάδες 15)

$$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1537 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (Μονάδες 10)

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση (Μονάδες 15)

$$f(x) = \frac{5}{2}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1541 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1542

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: (Μονάδες 13)

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3$$

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - x + 3$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1,3). (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.1544

α) Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: (Μονάδες 15)

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.1553 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 \quad \text{και} \quad g(x) = x, \quad x \in R$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν Α,Ο,Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α,Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.2212 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$ (Μονάδες 10)
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.2.2702 Δίνονται οι παραστάσεις:

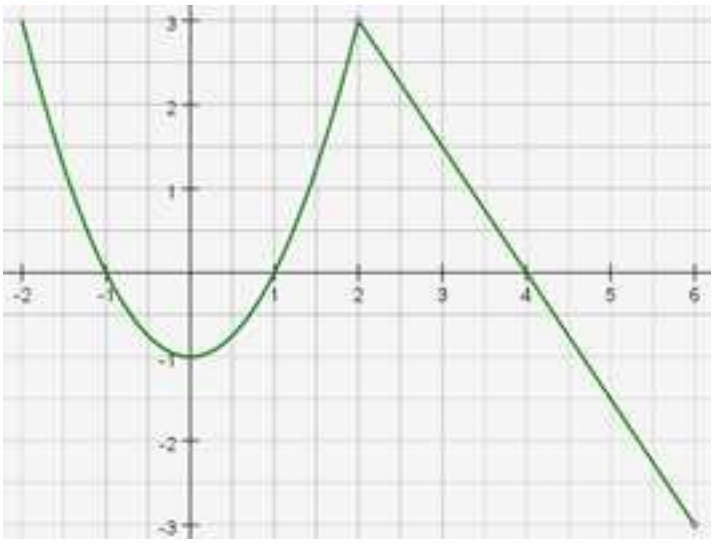
$$A = |2x - 4| \quad \text{και} \quad B = |x - 3|$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.
α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)
β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3378 Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών: (Μονάδες 6)

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

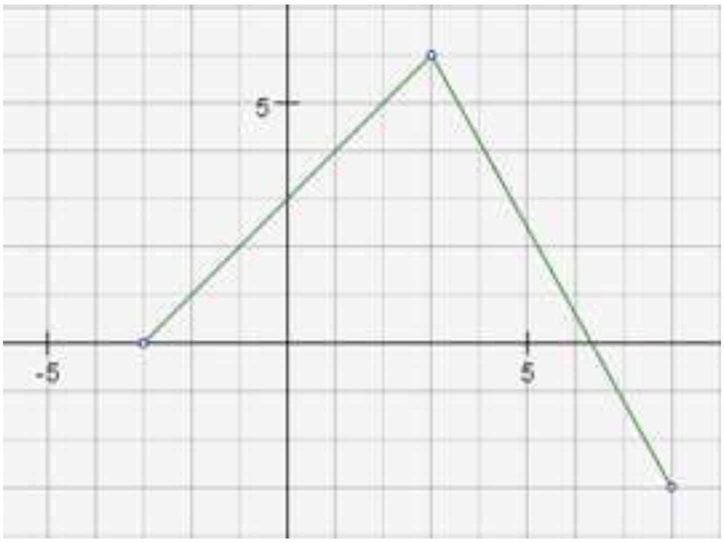
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)
δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)



Σχήμα 3.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Άσκηση GI.A.ALG.2.3379



Σχήμα 4.

Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών: (Μονάδες 6)

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3380 Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ x \in R$$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3381 Δίνεται η συνάρτηση g, με

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(1, – 4),
α) να δείξετε ότι μ = –6. (Μονάδες 9)
β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)
γ) για μ = –6 να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3382 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

α) Να δείξετε ότι: Α = 4. (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + A| = 1$$

(Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3383 Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο
Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.
α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: (Μονάδες 9)

i) $A \cup M$ ii) $M - A$ iii) M'

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :
i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7)
ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3384 Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα
Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου
α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: (Μονάδες 9)

i) $A \cup B$ ii) $B - A$ iii) A'

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:
i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 9)
ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3828 Οι αριθμοί $κ-2$, $2κ$ και $7κ+4$, $κ \in R$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$.

α) Να αποδείξετε ότι $κ = 4$ και να βρείτε το λόγο $λ$ της προόδου. (Μονάδες 12)

β)

i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του $α_1$. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι (Μονάδες 7)

$$α_2 + α_5 = 4(α_1 + α_4)$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.3839 Δίνεται η εξίσωση: $λx^2 - (λ-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $λ \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του $λ$ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $λ \neq 0$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3847 Δίνεται η εξίσωση

$$(λ+2)x^2 + 2λx + λ - 1 = 0$$

με παράμετρο $λ \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του $λ$ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3852 Για τους πραγματικούς αριθμούς $α,β$ ισχύουν: $2 \leq α \leq 4$ και $-4 \leq β \leq -3$ Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $α - 2β$ (Μονάδες 12)

β) $α^2 - 2αβ$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3857 Έστω $α,β$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$α \cdot β = 4 \quad \text{και} \quad α^2β + αβ^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $α + β = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $α$, $β$, και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3863 Έστω $α,β$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$α + β = -1 \quad \text{και} \quad α^3β + 2α^2β^2 + αβ^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha - \beta = -12$. (Μονάδες 10)
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3870 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta), \quad \text{όπου} \quad \alpha,\beta \in R$$

α) Να δείξετε ότι: (Μονάδες 3)

$$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. (Μονάδες 10)
γ) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3874 Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (Μονάδες 12)

$$K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.3878 Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α′ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ′ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:
α) Το πλήθος των μαθητών της Γ′ τάξης (Μονάδες 10)
β) Το πλήθος των μαθητών της Β′ τάξης. (Μονάδες 5)
γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β′ τάξης. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.3884 Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$
α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$ (Μονάδες 12)
β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x|$$

είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4288

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4290 Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: (Μονάδες 13)

$$K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.4295 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει:

$$|y-2| < 1$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: (Μονάδες 13)

$$K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.4299 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν:

$$3 \le x \le 5 \quad \text{και} \quad -2 \le y \le -1$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4300 Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν:

$$\alpha_1 = 2 \quad \text{και} \quad \alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4301 Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$ με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: (Μονάδες 13)

$$\frac{α_{15} - α_9}{α_{10} - α_7} = 2$$

β) Αν $α_{15} - α_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4302 Δίνεται η εξίσωση: $(α + 3)x = α^2 - 9$, με παράμετρο $α \in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $α = 1$ (Μονάδες 5)

ii) όταν $α = -3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4303 Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύουν: $α_4 - α_9 = 15$ και $α_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $α_ν = ν$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4304 Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ με διαφορά $ω = 4$, ισχύει: $α_6+α_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4305

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4306

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4308

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

(Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4309 Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο Π = 20cm και εμβαδό Ε = $24cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4310 Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha - \beta = -64$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α,β. (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4311 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(x - 2)^2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2 - x)^3}$$

όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει Α = Β. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4312 Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (Μονάδες 12)
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4313 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}, \quad B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B = 3 \quad \text{και} \quad A \cdot B = \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 12)
β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α, Β
(Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4314 Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α,Β. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4315 Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)
β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4316 Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4317 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.
α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 12)
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$ (Μονάδες 13)

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος
Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση GI.A.ALG.2.4318 Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, x, x^2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.2.4319 Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)
(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

Άσκηση GI.A.ALG.2.7518 Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - \kappa x - 2, \quad \text{με } \kappa \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $\kappa \in R$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.
(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1), (Μονάδες 12)

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 - x_2$ των ριζών της (1).

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$$\rho_1 = 2x_1 \quad \text{και} \quad \rho_2 = 2x$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.7519 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) (Μονάδες 12)

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$$

β) (Μονάδες 13)

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

Άσκηση GI.A.ALG.2.7520 Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta \in R$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 12)

γ) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.2.7521

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.2.8173 Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2}\approx 1{,}41$$
$$\sqrt{3}\approx 1{,}73$$
$$\sqrt{5}\approx 2{,}24$$
$$\sqrt{7}\approx 2{,}64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης; (Μονάδες 13)

$$\frac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.1868 Σε ένα τμήμα της Α′ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

(Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες; (Μονάδες 9)

β) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.1874 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: (Μονάδες 7)

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1,x_2) = \sqrt{24}$$

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.1880 Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x′x και y′y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.1890 Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: (Μονάδες 6)

$$\Delta = 12\lambda + 25$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 - x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση : (Μονάδες 8)

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.1936 Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα.

Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.

iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv) Να πέρασε την εξέταση.

(Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.1955 Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$
$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$
$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

α)

i) Να δείξετε ότι: (Μονάδες 5)

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.1963 Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in R$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1 , x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: (Μονάδες 9)

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.2046 Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2047 Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^η$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.
   i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)
   ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2052 Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 12{,}5x + 120$$

και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση

$$E(x) = 15{,}5x$$

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης; (Μονάδες 6)
β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)
β) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)
γ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2055 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$
α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in R$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in R$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2064 Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.
α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:
   i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2073 Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

(Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2080 Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2081 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii. Αν

$$x_1 = -1 \quad \text{και} \quad x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$$

είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2083 Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)
γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2084 Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά dcm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)$cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)
β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
  i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)
  ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2220 Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h(σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

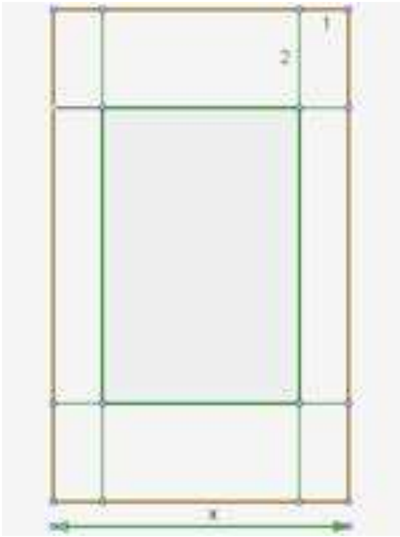
α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1) και h(2), και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)
γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5[1{,}21 - (t - 1)^2]$$

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1(σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05m. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2226 Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



Σχήμα 4.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4)$$

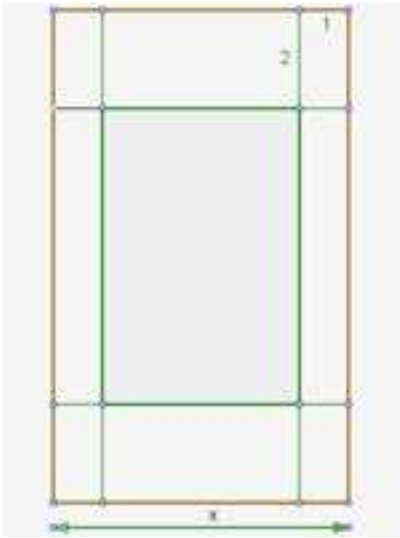
(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2.

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2229 Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$), στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



Σχήμα 5.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2.

(Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2234 Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8) β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^{0}K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^{0}F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ^{0}K μέχρι 283 ^{0}K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^{0}F. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2238 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2244 Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,4]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2255 Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2273 Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2287 Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση:

$$d(x,5) \leq 9$$

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5) β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2301 Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|$$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2302 Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2323 Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15, $\cdots$ και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.
(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2332 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):
 i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.
 ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:
 i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,
 ii) να βρείτε το λ. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2336

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in R$.
(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο λ .
 i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)
 ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.
(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2338 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

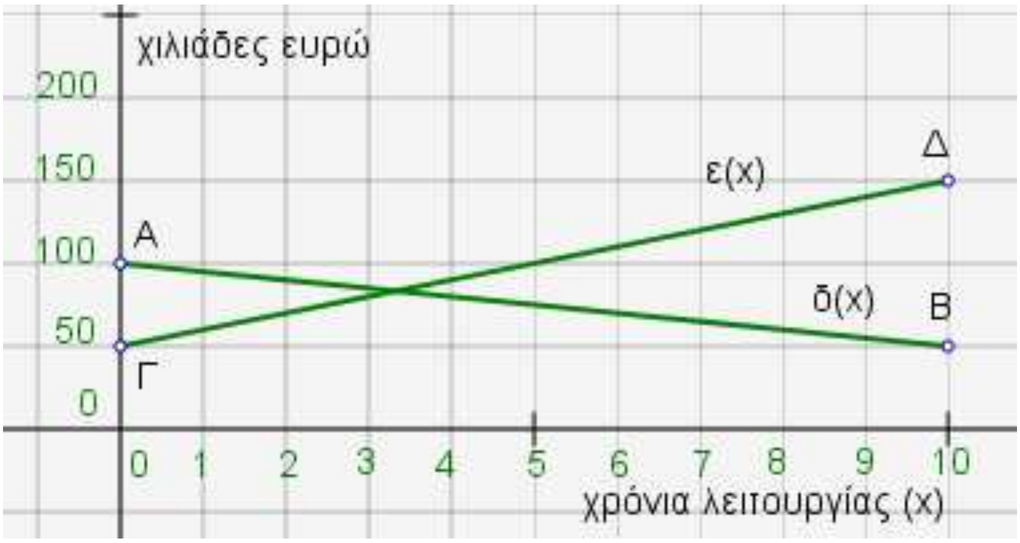
i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2339 Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



Σχήμα 5.

α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β)

i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.2340 Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα 1 ευρώ, το $2^{ο}$ μήνα 2 ευρώ, τον $3^{ο}$ μήνα

4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α)

i) Να βρείτε το ποσό $α_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $ν^ο$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό $β_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $ν^ο$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό $Α_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό $Β_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4542

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 < x$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < α < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad α, \quad α^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$ (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4545 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)
γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$ (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4548 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in R$.
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 10)
β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \frac{1}{\sqrt{S - P}}$$

όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4551 Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in R - \{0\}$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ (Μονάδες 8)
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών . (Μονάδες 5)
γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:
  i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)
  ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4558 Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)
β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
  i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)
  ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)
  iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 3)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4575 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5$$

με $\alpha \in R$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

(Μονάδες 5+5=10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4607

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 > x$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: (Μονάδες 10)

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: (Μονάδες 7)

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.4629 Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού. (Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το $1^{ο}$ λεπτό προχωράει 1 cm, το $2^{ο}$ λεπτό προχωράει 2 cm, το $3^{ο}$ λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.
  (i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 7)
  (ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4647 Για δεδομένο $\lambda \in R$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in R$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)
β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β(2,0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x′x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)
δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x′x. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4654

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta,\gamma \in R$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4656 Δίνονται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + x + 1, x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω M(x,y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4657 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν} \quad x < 0 \\ x + 2, & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = α$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4659 Δίνεται η εξίσωση: $αx^2 - 5x + α = 0$, με παράμετρο $α \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|α| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $α = 2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: (Μονάδες 10)

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.4660 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 4, \quad x \in R$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = α$, $α < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4663 Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = λ(4x - 3)$, με παράμετρο $λ \in R$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4665 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - λx - (λ^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $λ \in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $λ \in R$. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $λ \in R$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$$

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4667

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει:

$$α^2 - 3αβ - 4β^2 = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{α}{β}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4671 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $α_{20} - α_{10} = 10ω$. (Μονάδες 6)

β) Αν $α_{20} - α_{10} = 30$ και $α_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $α_ν = 3ν - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4679 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{α}{4}}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο R.

(Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,\frac{1}{2})$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $α = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4680 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + λ - λ^2 = 0$ (1), με παράμετρο $λ \in R$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $λ \in R$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1,x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4681 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (λ - λ^2) = 0$ (1), με παράμετρο $λ \in R$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $λ \in R$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $λ \neq \frac{1}{2}$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1,x_2) = \frac{1}{d(x_1,x_2)}$$

(Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4682 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$$

να έχει πεδίο ορισμού το R. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4819 Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in R$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$$

(Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2), \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad f(x_2 + 1),$$

(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4833 Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4835 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1) Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4836 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4853 Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4857 Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι (Μονάδες 7)

$$x_1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$$

Άσκηση GI.A.ALG.4.4858 Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4859 Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + κx - 4$, με παράμετρο $κ \in R$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$α < x1 < x2 < β$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $α \cdot f(α) \cdot β \cdot f(β)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4861 Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1) και h(2) και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (Μονάδες 8) γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: (Μονάδες 5)

$$h(t) = 5[1{,}21-(t-1)^2]$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4862 Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}5x & \text{αν} \quad 0 \le x \le 30 \\ 0{,}7x + 6 & \text{αν} \quad x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

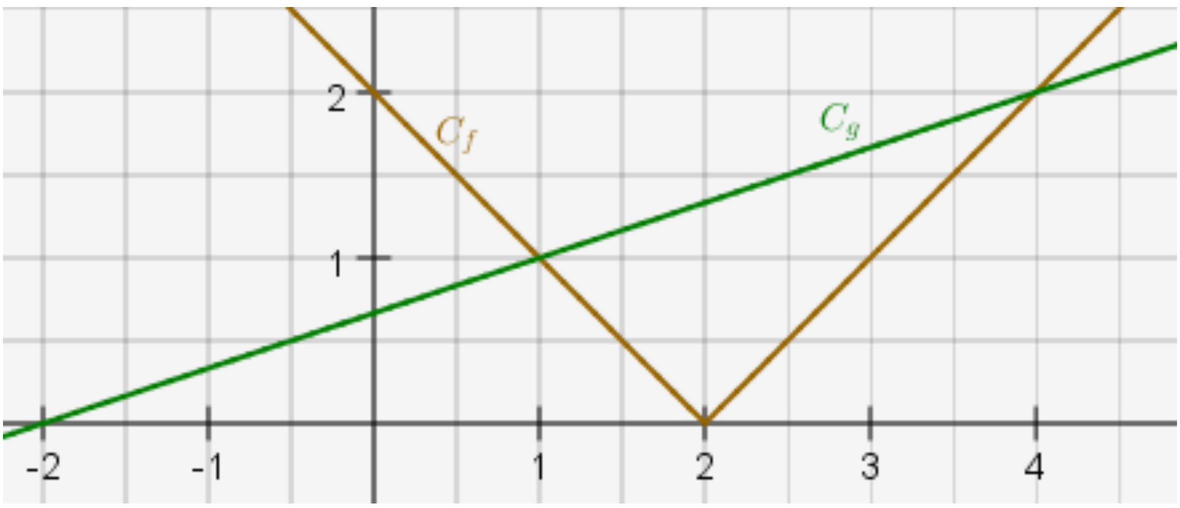
β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0{,}6x \quad \text{για} \quad x \ge 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4886 Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad x \in R$$



Σχήμα 6.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (Μονάδες 6)
β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)
γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)
δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$$

(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4903 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R - \{0\}$
α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4912 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in R$ και $\alpha \in R$.
α) Για α = 1, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες5)
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)
γ) Για α > 1, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4925 Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με κ > 1.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)
β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:
 i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι ω = 7. (Μονάδες 8)
 ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4946
α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 7)
β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x-3| \leq 5$$

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$||x|-3| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4952

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha \in R$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x)=x^2+2x+3, \quad x \in R$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in R$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2} \leq 2$ (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4957 Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda, \quad \lambda \in R-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$$

(Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4962 Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda \in R-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$. (Μονάδες 8) β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad 1$$

(Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4970 Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 + \lambda x - 36 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$$

(Μονάδες 4+6=10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4975

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in R$ Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.4992

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π = 34 cm και διαγώνιο δ = 13 cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $Ε = 60\ cm^2$. (Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\ cm^2$ και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5275 Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0{,}20 \cdot x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0{,}10 \cdot x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5285 Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1) \quad \text{και}$$
$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). (Μονάδες 10) γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5316 Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in R$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β)

i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5317

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (Μονάδες15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5322 Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

(Μονάδες 10)

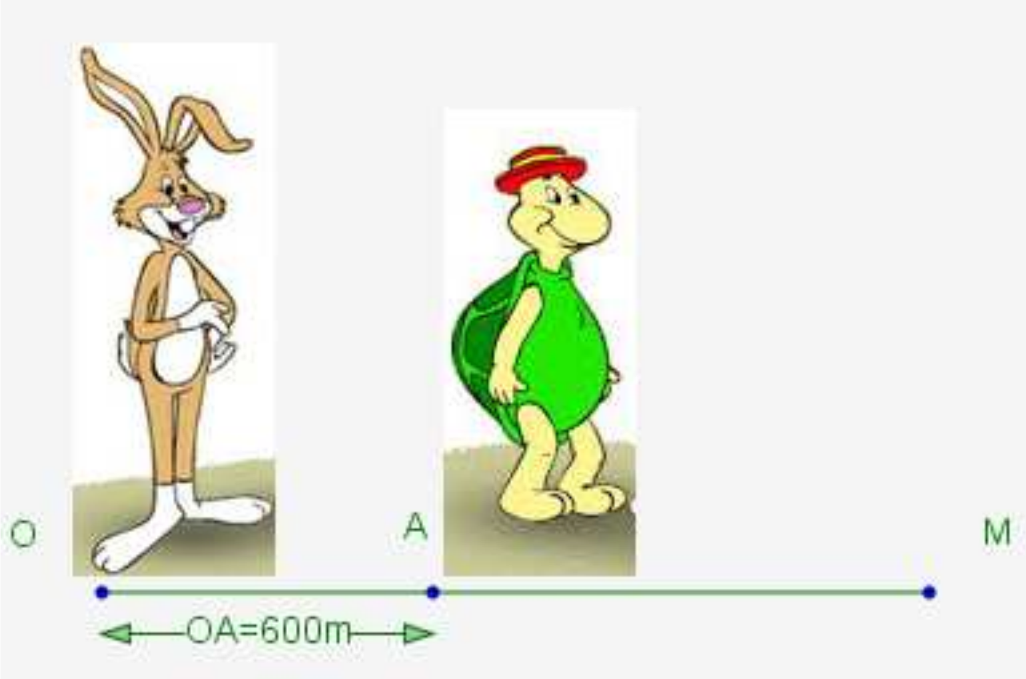
β) Αν $\kappa = \frac{8889}{4444}$ είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5879



Λαγός, Χελώνα.

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA = 600$ μέτρα. Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο

$$S_{\Lambda}(t) = 10t^2$$

μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο

$$S_X(t) = 600 + 40t$$

μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5882 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x-1)^2-4 \quad \text{και}$$
$$g(x) = |x-1| + 2 \quad \text{με} \quad x \in R$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5884 Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2-6x+\lambda-3, \quad \text{με} \quad \lambda \in R$$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.5885

α)

i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3| + |x^2+9x+18| = 0$ (Μονάδες 7)

β)

i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18$$

(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6143 Στην Α′ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

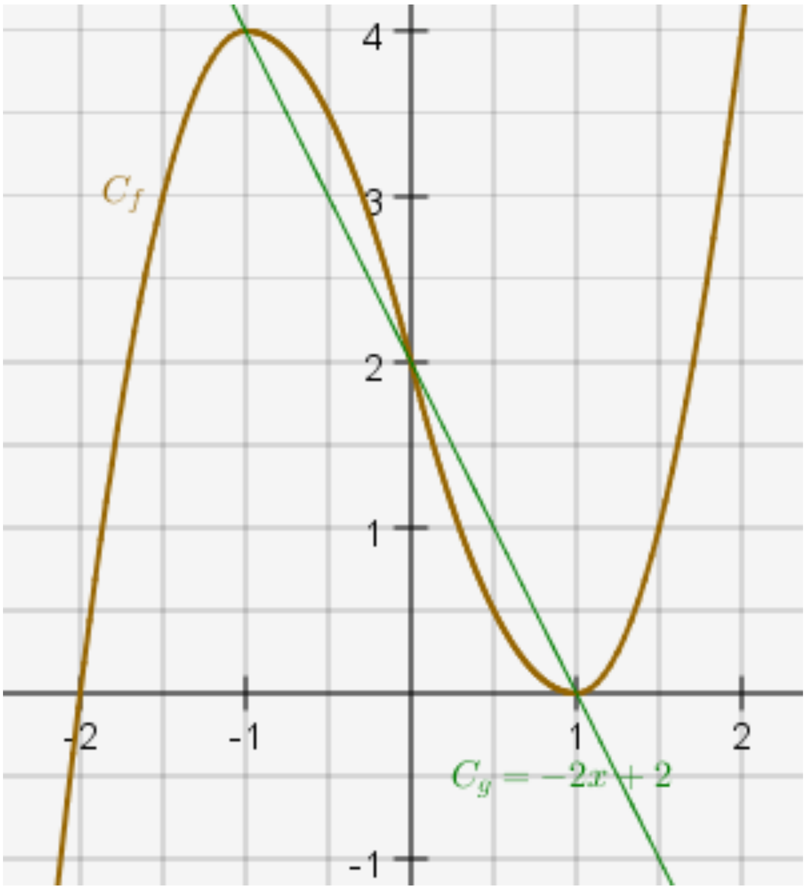
α) Να βρείτε την τιμή του x (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε η Α′ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)
γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6144 Μια ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα
Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 9)
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:
  (i) να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα
  (ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα.
(Μονάδες 8)
γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:
  i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία
  ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα
(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6146 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: R \to R$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Σχήμα 7.

Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6223 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in R$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in R$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

(Μονάδες9)

ii) Για λ = 1, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2^2$$

(Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6224 Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \quad \lambda \in (0,4)$$

α) Να βρείτε:
  i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)
  ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι $Π \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$. (Μονάδες 7)
γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6226 Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in (0,2)$$

α) Να βρείτε:
  i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)
  ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι $Ε \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$ (Μονάδες 7)
γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6227
α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)
γ) Αν $\alpha \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6228 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: x + y = 10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0,10)$$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι

$$E(x) \leq \frac{25}{2}$$

για κάθε $x \in (0,10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6229 Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α)

i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)	0	2	8
f(x)			

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

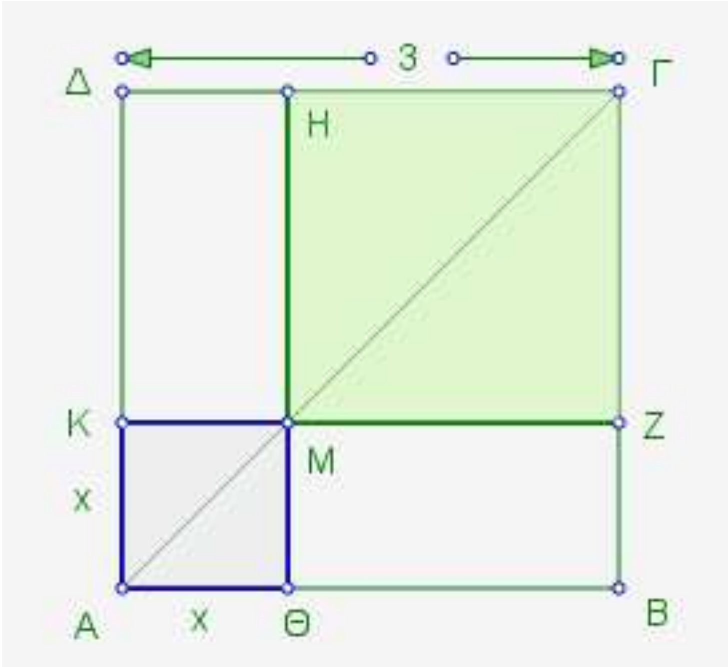
x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους f(x), g(x). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6231 Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



Σχήμα 8.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0,3)$. (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$. (Μονάδες 8)
γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6678 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$ (Μονάδες 10)
β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:
 i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β (Μονάδες 5)
 ii) Να βρείτε τα μήκη α, β (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.6859 Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x > 0$.
α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να

αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,\cdots$ και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος $2,4,8,16,\cdots$ τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει:

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7$$

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7263 Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda \in R$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β)

i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ)

i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2-6|x|+\lambda = 7 \quad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7502 Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

$$\text{Γυναίκα}: y = 0{,}43x - 26$$

$$\text{Άνδρας}: y = 0{,}45x - 31$$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7503 Οι αριθμοί : x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\cdots+\alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7504 Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\cdots+(\alpha_{31}+31)$$

(Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7506 Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y=60t-5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175m$;

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

Άσκηση GI.A.ALG.4.7510 Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ, και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A<s_B$$

$$s_\Gamma=\frac{s_A+3s_B}{4} \quad \text{και}$$

$$|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

Ο__________Α__________Β______________

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

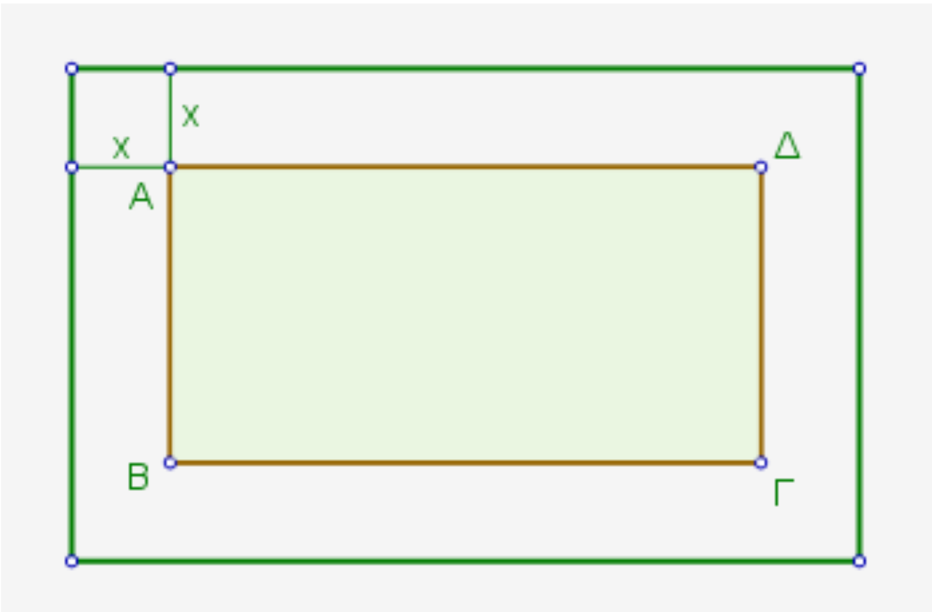
$$s_A + s_B = 1{,}4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0{,}45$$

τότε:

i) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^ου^ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, $s_Γ$, και $s_Δ$. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7511 Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m(x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 9.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \quad x > 0$$

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

(Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500m^2$. (Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7512 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο Π = 40cm Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 20x - x^2$$

(Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0,20)$. (Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7514 Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

(Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7515 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$$

τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7516 Δίνονται η εξίσωση: $αx^2 - (α^2 - 1)x - α = 0$, με παράμετρο $α \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$Δ = (α^2 + 1)^2$$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$ρ_1 = α \quad \text{και} \quad ρ_2 = -\frac{1}{α}$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|ρ_1 - ρ_2| = 2$. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7517 Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $Κ(ν)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $Ε(ν)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7677 Δίνεται η ανίσωση: $|x + 1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + βx + γ$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7684 Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7) β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + βx + γ$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7745 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$$

(Μονάδες 7)

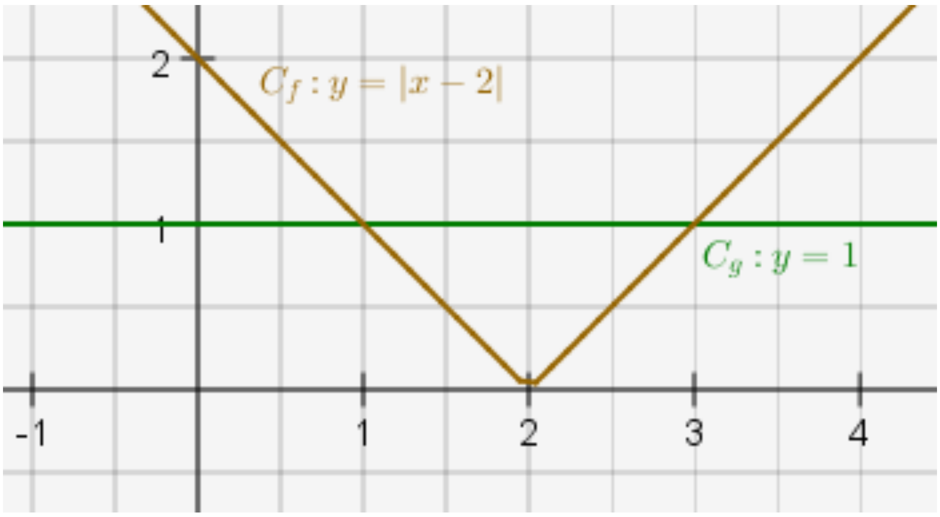
γ) Αν $-3 < α < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-α^2 + 2|α| + 3$$

(Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7784 Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις Cf και Cg των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in R$$



Σχήμα 10.

α)

i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.
(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.
(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7791 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7940

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7958

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \quad (1)$$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ. (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι:

$$|\kappa-\lambda| \geq \frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.7974 Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο:

$$x^2-(\alpha-2)x + \frac{1}{4}$$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in R$, ισχύει

$$x^2-(\alpha-2)x + \frac{1}{4} > 0$$

(Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8170 Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \quad \alpha_5 = 16 \quad \text{και} \quad \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $(\beta\nu) = \frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9}S_{10}$$

(Μονάδες 8)

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Άσκηση GI.A.ALG.4.8217

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + x - 6 < 0$$

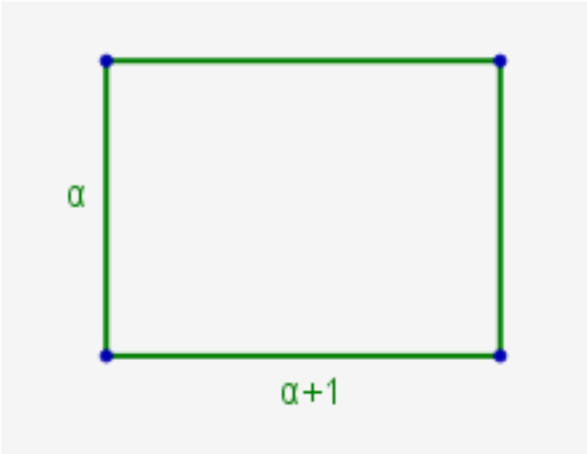
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$|x - \frac{1}{2}| > 1$$

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α + 1



Σχήμα 11.

όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση

$$|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$$

Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει Ε < 6, τότε:

i) Να δείξετε ότι:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8443

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8445

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in R$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

(Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8448 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ x + 3, & x < 0 \end{cases}$$

(Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y. (Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8451 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3} \quad \text{όπου} \quad \alpha \in R$$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x′x και y′y. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8453 Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in R$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)
β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)
γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)
δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8455 Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in R$ ισχύει ότι

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α) Να αποδειχθεί ότι

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 1$$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι

$$|\beta - 3\alpha - 1| < 3$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$$

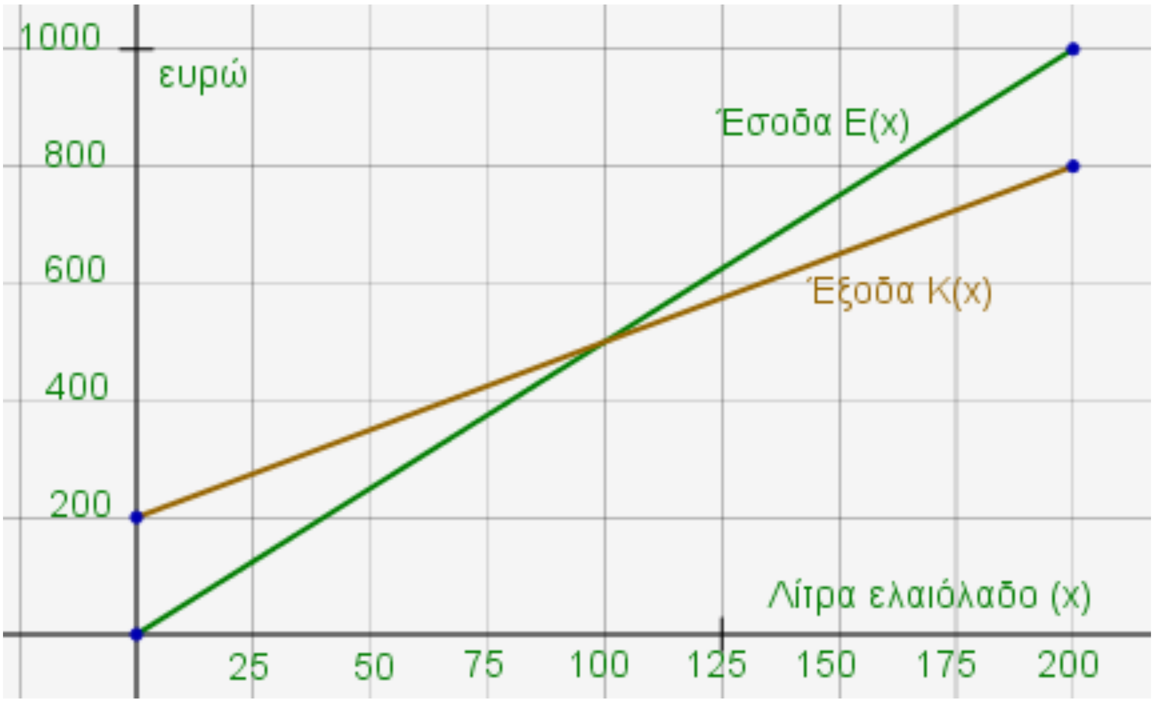
έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο R των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.8458 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in N^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = x,$$
$$\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,$$
$$\alpha_3 = x^2 - 2 \quad \text{όπου} \quad x \in R:$$

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)
β) Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.10774



Σχήμα 12.

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα Κ(x) και τα έσοδα Ε(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.10775 Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^{η}$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^{η}$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5) δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.
(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

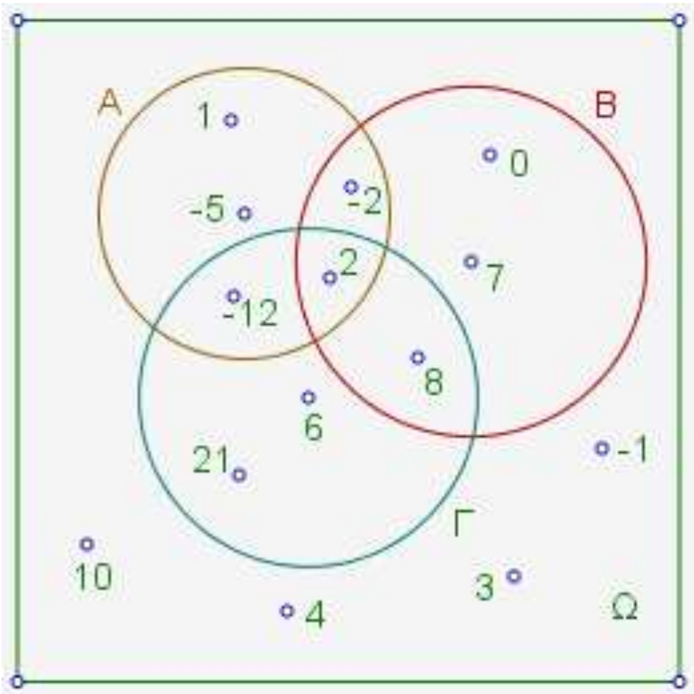
Άσκηση GI.A.ALG.2.000

α) Αν Α,Β,Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A'

(Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα Α,Β και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)



Διάγραμμα Venn. Σχήμα 1

Άσκηση GI.A.ALG.2.000 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = -x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.2.000 Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι $(x + 1)$ και x, με $x > 0$.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι $90m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (1) να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2) + 1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha + 1)x + 4$, $\alpha \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)2 - 16:$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x1 και x2.

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$, το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του. (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1) \cdot d(x_2,1) = 4$ (Μονάδες 8)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 4x + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 9$$

με πεδίο ορισμού το R.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x′x. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3,0) και (−3,0). (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα x′x που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα x′x. (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται συνάρτηση

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $R - \{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

  i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

  ii) Να δείξετε ότι: $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$, όταν $-1 < \alpha < 2$ (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται συνάρτηση

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $R - \{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

  i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

  ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta) > 0$, όταν $-1 < \alpha < 2$ και $-1 < \beta < 2$ (Μονάδες 7)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in R - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$. (Μονάδες 9)
β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in R$. (Μονάδες 10)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in R - \{0\}$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ (Μονάδες 8)
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. (Μονάδες 6)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό, αρχικής θερμοκρασίας 25°C, και με χρήση ενός θερμομέτρου παρατηρεί ότι η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 5°C ανά λεπτό.
α) Είναι η αντιστοιχία χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες5)
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε °C	25				50	60

(Μονάδες 5)
γ) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία, τοποθετώντας το χρόνο (t) στον οριζόντιο άξονα. (Μονάδες 5)
δ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό (το νερό βράζει στους 100°C). Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 5)
ε) Να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία

χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία

και να υπολογίσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό. (Μονάδες 5)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $8^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in R$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + α$. Να δείξετε ότι:

i) αν $α > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $α < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινά σημεία (Μονάδες 15)

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με $β_ν$ το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($ν \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία $(β_ν)$ είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος $β_ν$ των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 12)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

Ν.Κεχρής
Β.Ζαραφέτας
Γ.Μιχαλιάνος

Φροντιστήριο"ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ"
Αρχιεπισκόπου Χρύσανθου 3
Τηλ.: 210.81.37.280

Άσκηση GI.A.ALG.4.000 Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.
(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.
(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.
(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10021} = 101$) (Μονάδες 8)