ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Π ρ ό β λ η μ α   β ο ε ι κ ό ν

Ὑπὸ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
(Αθήνα, Ιούλιος 2016)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ,

ὅπερ ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν
τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
ἐν τῇ πρὸς ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ
ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
Χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
Ἄλλογε μὲν ξανθὸν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι,
Συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες. Ἀργότριχας μὲν
Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ,
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον.
Αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ μέρεϊ
Μικτοχρόων, καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσι τε πᾶσι.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχροας ἄθρει
Ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει, ἑβδομάτῳ τε,
Καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείῃσι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
Ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι.
Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο,
Σὺν ταύροις πάσης εἰς νομὸν ἐρχομένης.
Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον. Τετραχῆ
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
Ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπὼν·
Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται.
Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι', οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
Οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐν ἀριθμοῖς· ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδε πάντα βοῶν ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
Κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖ τ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
Ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον· οὔτε προσόντων
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας,
Καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα,
Ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος· ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Π ρ ό β λ η μ α   β ο ε ι κ ό ν

Πρόβλημα, ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον, φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης, πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη

Το πλήθος των βοδιών του Ηλίου, ξένε, μέτρησε με φροντίδα επισταμένη, αν μετέχεις της σοφίας, πόσα βοσκούσαν στης Σικελίας τις πεδιάδες κάποτε, στης Θρινακίας το νησί, σε τέσσερα κοπάδια χωρισμένα,

5

χροιὴν ἀλλάσσοντα˙ τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος, κυανέῳ δ’ ἕτερον χρώματι λαμπόμενον, ἄλλογε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἑκάστῳ στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι

5

ανάλογα με το χρώμα τους˙ το ένα μεν λευκό του γάλακτος, μαύρο δε το ἕτερον χρώμα, που έλαμπε, το άλλο δε ήτανε ξανθό και το άλλο παρδαλό. Σε έκαστο κοπάδι δε, ήτανε ταύροι πλήθος

9

συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες˙ ἀργότριχας μὲν κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον, αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει

9

που ετύγχανον τέτοιας συμμετρίας˙ οι λευκοί ήσαν ίσοι με το ήμισυ και ένα τριτον των μαύρων ταύρων συν όλους τους ξανθούς. Ξένε νὸησε, Οι μαύροι αφ' έτερου ήσαν ίσοι με το ένα τέταρτον

13

μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν. τοὺς δ’ ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε καὶ ξανθοῖς αὖτις πᾶσιν ἰσαζομένους.

13

και ένα πέμπτον μέρος των παρδαλών συν όλους τους ξανθούς. Οι δε ὑπολειπόμενοι παρδαλοί ίσοι με το ένα έκτον και ένα έβδομον μέρος των λευκών συν όλους τους ξανθούς.

17

θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ᾽ ἔπλετο˙ λευκότριχες μέν ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι˙ αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν

17

Ως προς τις αγελάδες δε, οι ακόλουθες σχέσεις. Οι λευκές ήσαν ίσες ακριβώς, με το ένα τρίτον και ένα τέταρτον της μαύρης αγέλης. Οι δε μαύρες ήσαν ίσες με το ένα τέταρτον

21

μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο σὺν ταύροις˙ πάσης δ᾽ εἰς νομὸν ἐρχομένης ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.

21

και ένα πέμπτον όλων των παρδαλών, σὺν των ταύρων. όταν ήρχοντο δε όλες μαζί εις βοσκήν, οι παρδαλές ήταν ίσες με το ένα πέμπτον και ένα έκτον μέρος των ξανθών.

25

ξανθαὶ δ᾽ ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι ἀργεννῆς ἀγέλη ἑβδομάτῳ τε μέρει. ξεῖνε, σὺ δ᾽ Ἠελίοιο βοῶν πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών, χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,

25

Οι δε ξανθές αν αριθμούντο θα ήσαν ίσες με το ήμισυ του τρίτου μέρους συν το έβδομον μέρος της αγέλης των λευκών. Ξένε, συ, αν μου πείς με ακρίβεια πόσα ήσαν τα βόδια του Ηλίου, χωριστά και πόσοι οι καλοθρεμμένοι ταύροι,

29

χωρὶς δ᾽ αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται, οὐκ ἄιδρίς κε λέγοι᾽ οὐδ᾽ ἀριθμῶν ἀδαής, οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. ἀλλ᾽ ἴθι φράζευ καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.

29

χωριστά δε πάλι πόσες ήσαν οι αγελάδες εκάστου χρώματος, δεν θα χαρακτηρίζεσαι ως ανίδεος και ἀδαής των αριθμών, αλλά ούτε ακόμη δυνατόν να συγκαταριθμηθής με τους σοφούς. Έλα λοιπόν σκέψου και τα ακόλουθα για τα βόδια του Ηλίου.

33

ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν κυανέοις, ἵσταντ᾽ ἔμπεδον ἰσόμετροι εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ᾽ αὖ περιμήκεα πάντῃ πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.

33

Αν οι λευκοί ταύροι αναμιγνύονταν με το πλήθος των μαύρων, βρίσκονταν σε συμπαγή σχηματισμό, ο οποίος έχει το αυτό μέτρον εις βάθος και εις πλάτος, οι πεδιάδες της Θρινακίας θα εγέμιζαν εξ ολοκλήρου από το τετράγωνον αυτό.

37
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνος ἀρχόμενοι σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.

37
Από το άλλο δε μέρος αν οι ξανθοί και οι παρδαλοί συναθροιστούν μαζί, σταθούν αρχόμενοι ἐξ ἑνος, βαθμηδόν, θα σχηματίζουν τέλειο τρίπλευρο και δεν θα περισσεύουν ή θα χρειαστούν ταύροι άλλων χρωματισμών.

41
ταύτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πὰντα μέτρα ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος, ἴσθι τε πάντως κεκριμένος ταύτῃ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

41
Αν αυτά τα εύρης και τα συμπεριλάβης μέσα εις την σκέψιν σου, και εκφράσης όλα τα μέτρα των πληθών, ω ξένε, άπελθε υπερηφανευόμενος ότι ανεδείχθης νικητής και να γνωρίζης ότι έχεις κριθή τέλειος εις αυτήν την σοφίαν.

Από τα επιτάγματα του προβλήματος καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις [1] :

$$\Lambda = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{M} + \Xi$$
$$\mathrm{M} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\Pi + \Xi$$
$$\Pi = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\Lambda + \Xi$$
$$\lambda = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(\mathrm{M} + \mu)$$
$$\mu = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(\Pi + \pi)$$
$$\pi = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(\Xi + \xi)$$
$$\xi = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(\Lambda + \lambda)$$

όπου Λ=λευκοί, Μ=μαύροι, Π=ποικιλόχρωμοι, Ξ=ξανθοί ταύροι, αντίστοιχα και λ=λευκές μ=μαύρες, π=ποικιλόχρωμες, ξ=ξανθές αγελάδες, αντίστοιχα. Καταλήγουμε λοιπόν σε ένα σύστημα 7 εξισώσεων με 8 αγνώστους. Λύνοντας

[1] Μεταπτυχιακή Εργασία Ιστορία των προβλημάτων στα Μαθηματικά Γεωργία Νικολάου Γκρίτζαλη

αυτό το σύστημα παίρνουμε την εξής μονοπαραμετρική λύση :

$$\Lambda = 10366482t \quad M = 7460514t \quad \Pi = 7358060t \quad \Xi = 4149387t$$

$$\lambda = 7206360t \quad \mu = 4893246t \quad \pi = 3515820t \quad \xi = 5439213t$$

όπου t θετικός ακέραιος. Αυτά όμως τα στοιχεία δεν αρκούν για να υπολογίσει κανείς τον ακριβή αριθμό των βοδιών. Ο Αρχιμήδης δίνει δύο ακόμη συνθήκες.

$$\Lambda + M = \text{τέλειο τετράγωνο} = n^2 \tag{1}$$

$$\Xi + \Pi = \text{τρίγωνος αριθμός} = \frac{m(m+1)}{2} \tag{2}$$

Από την (1) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
&\Lambda + M = n^2\\
&10366482t + 7460514t = n^2\\
&17826996t = n^2\\
&2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot t = n^2
\end{aligned}$$

για να ισχύει αυτό μπρούμε να θέσουμε $t = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot s^2$, για κάποιο ακέραιο s. Από την (2) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
&\Xi + \Pi = \frac{m(m+1)}{2}\\
&11507447t = \frac{m(m+1)}{2}\\
&7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot t = \frac{m(m+1)}{2}\\
&2 \cdot (7 \cdot 353 \cdot 4657) \cdot (3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot s^2) = m^2 + m\\
&2^3 \cdot (7 \cdot 353 \cdot 4657) \cdot (3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot s^2) + 1 = 4m^2 + 4m + 1\\
&(2m+1)^2 = D \cdot (2 \cdot 4657 \cdot s)^2 + 1
\end{aligned}$$

όπου $D = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4729494$. Αυτή είναι της μορφής $P^2 - DQ^2 = 1$. Θα πρέπει τότε να βρούμε την ελάχιστη λύση (P,Q) για την οποία $2 \cdot 4657$ να διαιρεί το Q. Αναγνωρίζοντας ότι

$$(P_m + \sqrt{D}Q_m) = (P + \sqrt{D}Q)^m$$

ο A.Amthor έδειξε το 1880, ότι για $m = 2329$ τότε η (P_m, Q_m) είναι η ζητούμενη λύση. Ο συνολικός αριθμός των βοδιών, θα δίνεται από τον τύπο

$$T = c\left(\frac{Q_{2329}}{2 \cdot 4657}\right)^2$$

όπου $c = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 107 \cdot 4657 \cdot 5743 = 224571490814418$.